

TD 6 - Courbes paramétrées

Exercice 1 Etudier les courbes décrites en polaires par

1. $r = \theta + \frac{1}{\theta}$
2. $r = \cos(4\theta) + 1$
3. $r = 2 \sin \theta - 1$
4. $r = 2 + \sin 8\theta$

Exercice 2 On considère la courbe plane Γ de paramétrage $(3t - t^3, 3t^2)$

- a) Après étude, représenter la courbe.
- b) Déterminer l'abscisse curviligne s , les vecteurs de la base de Frenet \vec{T} , \vec{N} , et la courbure γ .
- c) Déterminer la développée de Γ .

Exercice 3 Déterminer et représenter la développée des courbes suivantes :

1. L'hyperbole $y = \frac{1}{x}$
2. L'ellipse $x = a \cos t, y = b \sin t$
3. La spirale $\rho = e^\theta$

Exercice 4 Soit $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 2$. On considère la courbe paramétrée dont le point variable est d'affixe :

$$z(t) = me^{it} - e^{imt}$$

- a) Exprimer $z(-t)$ et $z(t + \frac{2\pi}{m-1})$ en fonction de $z(t)$. En déduire des propriétés sur la courbe et un intervalle d'étude judicieux. (*On se limitera dans la suite à cet intervalle d'étude*)
- b) Décrire les points non réguliers.
- c) Déterminer une abscisse curviligne.
- d) Déterminer l'affixe du vecteur \vec{T} et celle du vecteur \vec{N} . Déterminer l'angle formé par les vecteurs \vec{i} et \vec{T} .
- e) Exprimer la courbure de la courbe. La courbe admet-elle des points d'inflexion ?
- f) Déterminer l'affixe du centre de courbure pour un point de la courbe.

Exercice 5 Soit Γ la courbe paramétrée par

$$M(t) = (t \cos t - \sin t, t \sin t + \cos t)$$

- a) Γ a-t-elle des points non réguliers, non biréguliers ? Quelle est l'allure de la courbe en ce(s) point(s) ?
- b) Déterminer une abscisse curviligne, les vecteurs de Frenet et la courbure de Γ .
- c) Déterminer la développée de Γ .
- d) Après étude de Γ , représenter Γ et sa développée (on se limitera à $t \in [-2\pi, 2\pi]$).