TD n°7 : CORRECTION

Algèbre linéaire : généralités et déterminants. .

Exercice 1 Montrer que les vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

1. $det\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{vmatrix} = det\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \times (-1) \times det\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{vmatrix} = -3$

Soit système libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc base.

2. on pose .

$\begin{cases} u = i + j + k \\ v = -i + j \\ w = i - k \end{cases}$ soit avec le pivot de Gauss : $\begin{cases} i = \frac{1}{3}(u - v + w) \\ j = \frac{1}{3}(u + 2v + w) \\ k = \frac{1}{3}(u - v - 2w) \end{cases}$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = i = \frac{1}{3}(u - v + w)$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = i + k = \frac{1}{3}(2u - 2v - w)$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = k = \frac{1}{3}(u - v - 2w)$$

Exercice 2 Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + a = 0,\ \text{et } x + 3az = 0\right\}$$
$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(1) = 0\}, \qquad E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(0) = 1\}$$
$$E_4 = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P' = 3\}, \qquad E_5 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 2y + 1 \geq 0\right\}.$$

E1.

- Si $a \neq 0$, alors $\vec{0} \notin E1$ donc E1 n'est pas un SEV.
- Si $a = 0$, alors $x = 0\ et\ y = 0,\ E1 = \{(0,0,z), z\ \in\ \mathbb{R}\}$ sev.

E2. : Sev, évident.

E3. : Pas un Sev car $\vec{0} \notin E3$

E4 : Pas un Sev car $\vec{0} \notin E3$

E5 : Pas un Sev car si $u\ (2,3) \in E5, -u\ \notin E5$

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Définition : Sous espace vectoriel. E est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ssi : $\begin{cases} E \neq \emptyset \\ \alpha x + \beta y \in E\ pour\ (x, y) \in E, et\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \end{cases}$

- E sev de $\mathbb{R}^4$
- **<u>Base de E</u>**.
  - $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$, donc dim(E)=3

    $$E = \left\{\begin{pmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, (x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3\right\}$$
  - $$E = \left\{x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Donc une base de E est : $\boxed{\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}$

Exercice 4 Soient $\vec{v_1}(1,2,3,4), \vec{v_2}(2,2,2,6), \vec{v_3}(0,2,4,4), \vec{v_4}(1,0,-1,2), \vec{v_5}(2,3,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. Soient $F = Vect\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ et $G = Vect\{\vec{v_4}, \vec{v_5}\}$. Déterminer une base des sous-espaces $F \cap G$, F, G et $F + G$.

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\6\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\4\\4\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix},$$

- $\boldsymbol{F = Vect\,\{v_1, v_2, v_3\}}$

Méthode du Pivot de Gauss pour les vecteurs.

v_1	v_2	v_3
1	2	0
2	2	2
3	2	4
4	6	4

puis

v_1	$v_2' = v_2 - 2v_1$	v_3
1	0	0
2	-2	2
3	-4	4
4	-2	4

puis

v_1	v_2'	$v_3' = v_3 + v_2'$
1	0	0
2	-2	0
3	-4	0
4	-2	2

La famille (v_1, v_2', v_3') a une forme échelonnée par rapport à la base canonique. Son rang est 3 et ses vecteurs forment donc une base de F.

- $\boldsymbol{G = Vect\,\{v_4, v_5\}}$

v_4	v_5
1	2
0	3
-1	0
2	1

puis

v_4	$v_5' = v_5 - 2v_1$
1	0
0	3
-1	2
2	-3

La famille (v_4, v_5') a une forme échelonnée par rapport à la base canonique. Son rang est 2 et ses vecteurs forment donc une base de G.

- $\boldsymbol{F \cap G}$ **et** $\boldsymbol{I = F + G}$

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
1	2	0	1	2
2	2	2	0	3
3	2	4	-1	0
4	6	4	2	1

v_1	$v_2' = v_2 - 2v_1$	v_3	$v_4' = v_4 - v_1$	$v_5' = v_5 - 2v_1$
1	0	0	0	0
2	-2	2	-2	-1
3	-4	4	-4	-6
4	-2	4	-2	-7

v_1	v_2'	$v_3' = v_3 + v_2'$	$v_4'' = v_4' - v_2'$	$v_5'' = v_5' - \frac{1}{2}v_2'$
1	0	0	0	0
2	-2	0	0	0
3	-4	0	0	-4
4	-2	2	0	-6

On remarque que $v_4'' = 0$, soit $v_4' - v_2' = 0$

et $v_4' = v_2'$

soit $v_4 - v_1 = v_2 - 2v_1$

Donc $\boxed{v_4 = (v_2 - v_1) \in F}$ et $\boxed{dim\,(FUG) = 4}$, $\boxed{dim\,(\boldsymbol{F \cap G}) = \mathbf{1}}$

- **Intersection** : $\boxed{\boldsymbol{F \cap G = Vect(v_4)}}$
- **Union** : Pour le reste, La famille (v_1, v_2', v_5'', v_3') a une forme échelonnée par rapport à la base canonique, son rang est 4 et ses vecteurs forment donc une base de $Vect\,(FUG) = F + G$.

Exercice 5
On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3})$.
2. $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$.
3. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_4})$.
4. $(3\vec{e_1} + \vec{e_3}, \vec{e_3}, \vec{e_2} + \vec{e_3})$.
5. $(2\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} - 3\vec{e_2}, \vec{e_4}, \vec{e_2} - \vec{e_1})$.

1. Oui.
2. Oui.
3. Non.

$$a\, e_1 + b(2e_1 + e_4) + ce_4 = 0$$

$$(a + 2b)\, e_1 + (c + b)e_4 = 0$$

En prenant $a = 1,\ b = -\frac{1}{2}\,, c = \frac{1}{2}$.

4. Non.
5. Non.

Exercice 6 Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}\{(1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5)\} \\ G &= \text{Vect}\{(-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\} \end{aligned}$$

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
1	-1	-5	-1	4
0	-2	-3	-1	1
1	3	1	1	2
1	-1	-5	-1	4

v_1	$v_2' = v_2 + v_1$	$v_3' = v_3 + 5v_1$	$v_4' = v_4 + v_1$	$v_5' = v_5 - 4v_1$
1	0	0	0	0
2	-2	-3	-1	1
3	4	6	2	-2
4	0	0	0	0

v_1	v_2'	$v_3'' = v_3' - \frac{3}{2}v_2'$	$v_4'' = v_4' - \frac{1}{2}v_2'$	$v_5'' = v_5' + \frac{1}{2}v_2'$
1	0	0	0	0
2	-2	0	0	0
3	4	0	0	0
4	0	0	0	0

On en déduit donc que :

- $dim\ F = 2$, et $F = Vect\ (v_1, v_2')$
- $\boldsymbol{F = G}$

$v_4'' = v_4' - \frac{1}{2}v_2' = 0$, soit $v_4 + v_1 = \frac{1}{2}(v_2 + v_1)$, et $\boxed{v_4 = \left(-\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2\right) \in F}$

$v_5'' = v_5' + \frac{1}{2}v_2' = 0$, soit $v_5 - 4v_1 = -\frac{1}{2}(v_2 + v_1)$, et $\boxed{v_5 = \left(\frac{7}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2\right) \in F}$

Exercice 7 Vérifier que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leurs noyaux (et la dimension des noyaux), et les matrices associés dans les bases canoniques :
a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $f(x, y) = (2x + 3y, x + y)$
b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $f(x, y, z) = (2x + y + z, -x + y, 3x + y + 2z)$
c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $f(x, y, z) = (x + y + z, y + 2z, x - z)$

a) $\boldsymbol{f(x,y) = (2x + 3y, x + y)}$

$$\boxed{ker\ f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; f(x,y) = 0\}}$$

$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0,$

soit $(x,y) = (0{,}0)$, donc f injective car $\boxed{Ker\ f = \{\vec{0}\}}$.

$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{Mat_{(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) $\boldsymbol{f(x,y,z) = (2x + y + z, -x + y, 3x + y + 2z)}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x + y + z = 0} \\ \boldsymbol{-x + y = 0} \\ \boldsymbol{3x + y + 2z = 0} \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, donc solution unique, soit $(x,y,z) = (0{,}0{,}0)$

f injective et $Ker\ f = \{\vec{0}\}$

$$\boxed{Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

c) $\boldsymbol{f(x,y,z) = (x + y + z, y + 2z, x - z)}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 0} \\ \boldsymbol{y + 2z = 0} \\ \boldsymbol{x - z = 0} \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$, On passe par le pivot

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=0 \\ -y-2z=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases} x=z \\ y=-2z \end{cases}}$$

Donc : $\boxed{ker\ f = \left\{ X = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, avec\ z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\boxed{dim\ ker\ f = 1}$

et

$$\boxed{Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 8 Soit f un endomorphisme défini sur E de dimension 2. On suppose que $f \circ f = 0$ et $f \neq 0$.
a) Montrer qu'il existe a tel que $f(a) \neq 0$.
b) On pose $b = f(a)$. Montrer que (a, b) est une base de E.
c) Quelle est la matrice associée à f dans la base (a, b) ?

a) Montrons qu'il existe a tel que $f(a) \neq 0$.

Si pour tout a de E, f(a) est nul, alors f est l'endomorphisme nul. Donc il existe au moins un élément a de E tel que $f(a) \neq 0$.

b) $b = f(a) \neq 0$. Montrons que (a,b) est une base de E.

Il suffit de montrer que (a,b) est une famille libre (de dimension 2).

$$\boxed{\begin{array}{c} (x_i)_{i\in I} \textit{ est une fammille libre ssi} \\ \forall J \textit{ partie finie de } I, \quad \forall (\lambda_i)_{i\in J}, \left(\sum_{i\in J} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow (\forall i \in J, \quad \lambda_i = 0)\right) \end{array}}$$

Supposons qu'il existe des λ_i tels que : $\lambda_1 a + \lambda_2 f(a) = 0 : (E1)$

En passant par f : $f(\lambda_1 a + \lambda_2 f(a)) = f(0)$

Et puisque f est une application linéaire : $\lambda_1 f(a) + \lambda_2 fof(a) = 0$

Or ici $fof = 0$ donc : $\lambda_1 f(a) = 0$

Et puisque $f(a) \neq 0$, cela implique que $\lambda_1 = 0$

Alors en remplaçant dans (E1) on obtient : $\lambda_2 f(a) = 0$, et de la même façon, $\lambda_2 = 0$.

$(a, b) = (a, f(a))$ est donc une famille libre de E de dimension 2, c'est donc une base de E.

c) Matrice de f.

$$f(a) = f(a)$$
$$f(b) = f(f(a)) = 0$$

$$\boxed{Mat_{(a,f(a))}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Exercice 9 Soient E l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 et δ l'endomorphisme de E qui à un polynôme associe son polynôme dérivé.
a) Ecrire la matrice C de δ dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ de E.
b) Ecrire la matrice B de δ dans la base $\mathcal{B} = (1, 1+X, 1+X^2, 1+X^3)$.

a) Matrice associée à δ dans la base $(1,\ X, X^2,\ X^3)$

$\delta(1) = 0$; $\delta(X) = 1$; $\delta(X^2) = 2X$;$\delta(X^3) = 3X^2$;

$$\boxed{C = Mat_{(1,X,X^2,\,X^3)}(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Matrice associée à δ dans la base $(1,\ 1+X, 1+X^2,\ 1+X^3)$

$\delta(1) = 0$; $\delta(1+X) = 1$

$\delta(1+X^2) = 2X = -2 \times \mathbf{1} + 2 \times (\mathbf{1} + \boldsymbol{X})$

$\delta(X^3) = 3X^2 = -3 \times \mathbf{1} + 3 \times (\mathbf{1} + \boldsymbol{X}^2)$

$$\boxed{B = Mat_{(1,1+X,1+X^2,\,1+X^3)}(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Exercice 10 — Calculer les déterminants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}, \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & c+d+a \\ a & c & c^2 & d+a+b \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{vmatrix}, \quad \Delta_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}.$$

1°) Δ_1 : Déterminant tridiagonale.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

On peut généraliser au cas où la matrice est d'ordre n : $d_n = \det\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$d_1 = 5$

$d_2 = 25 - 6 = 19$

Pour n ≥3, on développe par rapport à la première colonne.

$$d_n = 5 \times d_{n-1} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \times d_{n-1} - 2 \times 3 \times d_{n-2}$$

On obtient une relation de récurrence de la forme : $\boxed{d_n - 5d_{n-1} + 2 \times 3 \times d_{n-2} = 0}$

On peut donc facilement calculer : $d_3 = 5d_2 - 6d_1 = 65$, $d_4 = 211$ et $\boxed{\boldsymbol{d_5 = 665}}$

Expression générale :

L'équation caractéristique est : $r^2 - 5r + 6 = 0$, solutions 2 et 3

$d_n = a \times 2^n + b \times 3^n$, puis $\boxed{d_n = -2 \times 2^n + 3 \times 3^n}$

On retrouve : $\boxed{\boldsymbol{d_5 = 665}}$

2°) Δ_2 **: Déterminant circulant.**

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

- **Méthode 1 : Règle de Sarrus**. (Voir page web : http://www.math93.com/theoreme/notions_mathematiques.html#s)

$$\begin{matrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{matrix}$$

$$\Delta_2 = acb + bac + cba - b^3 - a^3 - c^3$$

$$\boxed{\Delta_2 = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3)}$$

- **Méthode 2 : Calcul direct.**

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\Delta_2 = (a+b+c)(-a^2 - b^2 - c^2 + ab + ac + bc)}$$

- **Compléments.**

On en déduit que pour tout (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)}$$

En appliquant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ aux vecteurs (a,b,c) et (b,c,a) on obtient :

Rappel : **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** $\boxed{|\vec{u}\,.\,\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$

Avec égalité ssi $(\vec{u}, \vec{v})$ liés (soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ colinéaires)
$(\vec{u}, \vec{v})$ lié $\Leftrightarrow \exists$ (a,b) ∈ K \ {0,0} tel que $a\vec{u} + b\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \exists$ k ∈ K tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

Soit : $|ab + bc + ca| \leq a^2 + b^2 + c^2$

Et donc : $\boxed{\forall\,(a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3 :\ a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc}$

3°) $\boldsymbol{\Delta_3}$ **: Déterminant de Vandermonde.**

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

- **<u>Méthode 1 : Astuce polynômiale</u>**.

Posons : $P(X) = V(a,b,c,X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & X \\ a^2 & b^2 & c^2 & X^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & X^3 \end{vmatrix}$. On a et donc $\Delta_3 = P(d)$

En développant par rapport à la dernière colonne, il apparait que P est une fonction polynômiale de degré 3.
Or a, b et c sont 3 racines de P.
Cela vient du caractère alternée de la forme multilinéaire appelée déterminant, (si 2 colonnes sont identiques, le déterminant est nul).
Le déterminant est une forme multilinéaire, antisymétrique et alternée.

De ce fait : $\boxed{P(X) = \alpha\,(X-a)(X-b)(X-c)}$.

Or le coefficient dominant de P est le terme qui apparait dans le développement devant X^3, c'est donc $V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ soit

$$V(a,b,c,d) = [V(a,b,c)] \times (d-a)(d-b)(d-c)$$

Par récurrence immédiate on obtient :

$$\boxed{V(a,b,c,d) = (b-a) \times (c-a)(c-b) \times (d-a)(d-b)(d-c)}$$

Formule générale :

$$\boxed{\boldsymbol{V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)}}$$

- **Méthode 2 : Par récurrence sur n**
  - Si n=1 : $\boxed{V(a_1) = 1}$
  - Si n=2 : $\boxed{V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1}$
  - Si n=3 : $V(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$

avec : $L2 - a_1 L1$; $L3 - a_1 L2$

$$V(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ (a_2 - a_1)a_2 & (a_3 - a_1)a_3 \end{vmatrix}$$

$$V(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$

$$\boxed{V(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$$

Alors posons pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ (a_2 - a_1)a_2 & \dots & (a_n - a_1)a_n \\ \vdots & & \vdots \\ (a_2 - a_1)a_2^{n-2} & \dots & (a_n - a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$V(a_1, \dots, a_n) = (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$V(a_1, \dots, a_n) = (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1)\, V(a_2, \dots, a_n)$$

Et le résultat par récurrence immédiate.

4°) $\boldsymbol{\Delta_4}$.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

Astuce : *Quand la somme des termes de chaque ligne est la même, on additionne et on factorise.*

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ a+b+c & 0 & b & c \\ a+b+c & b & 0 & c \\ a+b+c & b & c & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & 0 & b & c \\ 1 & b & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & -b & 0 \\ 0 & b-a & c-b & -c \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = (a+b+c)\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ b-a & -b & 0 \\ b-a & c-b & -c \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta_4 = -(a+b+c)abc}}$$

5°) $\boldsymbol{\Delta_5}$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Astuce : *Quand la somme des termes de chaque ligne est la même, on additionne et on factorise.*

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a+b+2c & c & c & b \\ a+b+2c & a & b & c \\ a+b+2c & b & a & c \\ a+b+2c & c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+2c)\begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & c \\ 1 & c & c & a \end{vmatrix}$$

$$\Delta_5 = (a+b+2c)\begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a-c & b-c & c-b \\ 0 & b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+b+2c)\begin{vmatrix} a-c & b-c & c-b \\ b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$\Delta_5 = (a+b+2c)(a-b)\begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix} = (a+b+2c)(a-b)\left[(a-c)^2-(b-c)^2\right]$$

$$\Delta_5 = (a+b+2c)(a-b)(a+b-2c)(a-b)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta_5 = (a+b+2c)(a+b-2c)(a-b)^2}}$$

6°) $\boldsymbol{\Delta_6}$

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & c+d+a \\ a & c & c^2 & d+a+b \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & a-b \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & a-c \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & a-d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 & a-b \\ c-a & c^2-a^2 & a-c \\ d-a & d^2-a^2 & a-d \end{vmatrix}$$

Les colonnes 1 et 3 sont opposées donc $\boxed{\boldsymbol{\Delta_6 = 0}}$

7°) $\boldsymbol{\Delta_7}$

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 0 & c-a & c^2-a^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \\ 0 & d-b & d^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} c-a & c^2-a^2 \\ d-b & d^2-b^2 \end{vmatrix} = (c-a)(d^2-b^2)-(d-b)(c^2-a^2)$$

$$\Delta_7 = (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})(d+b)-(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})(c+a)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta_7 = (c-a)(d-b)(d+b-c-a)}}$$

Exercice 11 — A est une matrice de taille n, antisymétrique (c'est-à-dire que ${}^tA = -A$).
Montrer que si A est inversible, n est pair.

Pour une matrice antisymétrique on a :

$$det\,(A) = \det\left({}^tA\right) \overset{\text{def}}{=} det\,(-A) = (-1)^n det\,(A)$$

Soit $\boxed{det\,(A) = (-1)^n det\,(A)}$

Si A est inversible, alors : $det\,(A) \neq 0,$ et donc **n est pair**.

Exercice 12 — Déterminer le déterminant des matrices de taille n de coefficients a_{ij} dans les cas suivants :

1. $a_{ij} = i^3 + 3i^2 - 5$
2. $a_{ij} = ij$
3. $a_{ij} = i + j$

1°) $\boldsymbol{a_{ij} = i^3 + 3i^2 - 5}$

- Pour n=1, $\boxed{\boldsymbol{\Delta_1 = -1}}$

- Pour n≥2.

Rien à faire ou presque car toutes les colonnes sont identiques, donc le déterminant est nul.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ 15 & 15 & \dots & 15 \\ & & & \\ n^3+3n^2-5 & n^3+3n^2-5 & \dots & n^3+3n^2-5 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta_1 = 0}}$$

2°) $\boldsymbol{a_{ij} = ij}$

- Pour n=1, $\boxed{\boldsymbol{\Delta_2 = 1}}$

- Pour n≥2.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 2 & 2\times 2 & \dots & \dots & 2\times n \\ 3 & 3\times 2 & \dots & & 3\times n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ n & n\times 2 & & \dots & n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2\times 1 & \dots & \dots & n\times 1 \\ 2 & 2\times 2 & \dots & \dots & n\times 2 \\ 3 & 2\times 3 & \dots & & n\times 3 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ n & 2\times n & & \dots & n\times n \end{vmatrix}$$

Les colonnes sont colinéaires donc, $\boxed{\boldsymbol{\Delta_2 = 0}}$

3°) $\boldsymbol{a_{ij} = i + j}$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \dots & n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & n+n \end{vmatrix}$$

- Pour n=1, $\boxed{\Delta_3 = 2}$
- Pour n=2, $\boxed{\Delta_3 = 8 - 9 = -1}$

- Pour n≥3.

$C2 - C1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$; $C3 - C1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}$; ….

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & \dots & n+1 \\ 3 & 1 & 2 & \dots & n+2 \\ 4 & 1 & 2 & \dots & n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+1 & 1 & 2 & \dots & n+n \end{vmatrix}$$

Les colonnes 2 et 3 sont colinéaires donc $\boxed{\boldsymbol{\Delta_3 = 0}}$

Exercice 13 — Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ le rang des matrices $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$ et $N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- <u>**Si $t = 1$**</u>, $M_1 = N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $\boxed{rang(M_1) = rang(N_1) = 1}$
- <u>**Si $t \neq 1$**</u>,
  - $\det(M_t) = \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} = 0$ (2 lignes égales)

    Donc : $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{rang(M_t)} < 3$
  - Pour $t \neq 1$, les vecteurs colonnes C2 et C3 forment un système libre

    Donc : $\mathbf{2} \leq \boldsymbol{rang(M_t)} < 3$

    De ce fait $\boxed{\boldsymbol{rang(M_t) = 2}}$

<u>Remarque</u> : On peut aussi remarquer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t \neq 0 \; (pour\ t \neq 1)$

  - $\det(N_t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+t & 1 & t \\ 2+t & t & 1 \\ 2+t & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+t) \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

    $\det(N_t) = (2+t) \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (2+t)(1-t)(t-1)$

    $\boxed{\mathbf{det}(\boldsymbol{N_t}) = -(\boldsymbol{t}+\mathbf{2})(\boldsymbol{t}-\mathbf{1})^2}$
  - $\boxed{\textbf{Si } \boldsymbol{t \neq 1, t \neq -2}\textbf{, alors } \mathbf{det}(\boldsymbol{N_t}) \neq \mathbf{0}\textbf{, donc } \boldsymbol{N_t} \textbf{ inversible et de rang 3}}$.
    - On a vu que <u>**si $t = 1$**</u>, $\boldsymbol{N_1}$ **est de rang 1**.
    - <u>**si $t = -2$**</u>,

      $N_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

      N_{-2} n'est pas de rang 3 et les vecteurs colonnes C_1 et C_2 forment un système libre, de ce fait $\boxed{\boldsymbol{rang(N_{-2}) = 2}}$

Exercice 14 — Soit A la matrice de taille n suivante, où a, b, c sont des réels (on suppose $b \neq c$).

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \ddots & b \\ c & c & a & \ddots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{pmatrix}$$

On note B la matrice de taille n avec tous ses coefficents égaux à 1.
a) On introduit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \det(A + xB)$
Que valent $f(-c)$ et $f(-b)$?
b) Montrer que la fonction f peut s'écrire $f(x) = \alpha x + \beta$, avec α et β deux réels.
c) Déterminer α et β grâce à la question a).
d) Que vaut $\det A$?

<u>a) $\boldsymbol{f(x) = det(A + xB)}$</u>

$$\boldsymbol{f(x) = det\ (A + xB)} = \begin{vmatrix} a+x & b+x & b+x & \dots & b+x \\ c+x & a+x & b+x & \dots & b+x \\ c+x & c+x & a+x & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & b+x \\ c+x & c+x & c+x & & a+x \end{vmatrix}$$

On a :

$$\boldsymbol{f(-c) = det\ (A - cB)} = \begin{vmatrix} a-c & b-c & b-c & \dots & b-c \\ 0 & a-c & b-c & \dots & b-c \\ 0 & 0 & a-c & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & b-c \\ 0 & 0 & 0 & & a-c \end{vmatrix}$$

C'est le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure dont on obtient facilement :

$$\boxed{\boldsymbol{f(-c) = det\ (A - cB) = (a - c)^n}}$$

et de même f(-b) est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure

$$\boxed{\boldsymbol{f(-b) = det\ (A - bB) = (a - b)^n}}$$

<u>b) $\boldsymbol{f(x) = \alpha x + \beta}$</u>

En faisant : $C_j \longrightarrow C_j - C_1$ (pour $j > 1$)

$$\boldsymbol{f(x) = det\ (A + xB)} = \begin{vmatrix} a+x & b-a & b-a & \dots & b-a \\ c+x & a-c & b-c & \dots & b-c \\ c+x & 0 & a-c & & b-c \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & b-c \\ c+x & 0 & 0 & & a-c \end{vmatrix}$$

Donc il n'y a plus de x que dans la première colonne. Si on développe par rapport à cette colonne, on obtient bien une expression du déterminant de la forme : $\boxed{\boldsymbol{f(x) = \alpha x + \beta}}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

c) Déterminons les constantes $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{R}^2$

Il suffit de résoudre le système : On a $c \neq b$

$$\begin{cases} f(-c) = -\alpha c + \beta = (a-c)^n \\ f(-b) = -\alpha b + \beta = (a-b)^n \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{\alpha = \dfrac{(a-c)^n - (a-b)^n}{b-c}} \\ \boldsymbol{\beta = \dfrac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}} \end{cases}}$$

d) Déterminons det A.

$$\boxed{\boldsymbol{f(0) = det\,(A) = \beta = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}}}$$

Exercice 17 —
Soit u l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $u(P) = P + P'$. Calculer $\det u$. Même question lorsque $u(P) = XP' + P(1)$.

1. Soit u l'application définie par $u(P) = P + P'$

- La linéarité de u comme opérateur de $\mathbb{R}_n[X]$ à valeur dans $\mathbb{R}\ [X]$ est claire.
  Il reste à vérifier que le degré de u(P) est bien inférieur ou égal à n.
  Il suffit de le vérifier en calculant les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ ce qui est assez évident.
  Donc **u est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$**.

- Ecrivons la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
  - $u(1) = 1 + 0 = 1$
  - $u(X) = X + 1 = 1 + X$
  - $u(X^2) = X^2 + 2X = 2X + X^2$
  - $Pour\ i > 1;\quad u(X^i) = iX^{i-1} + X^i$

$$\boxed{A = Mat_{(1,X,X^2,\dots,X^n)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & i & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R}).}$$

A est clairement une matrice triangulaire supérieure donc :

$$\boxed{\det(A) = 1}$$

Complément :

La matrice est inversible et donc u est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit u l'application définie par $u(P) = XP' + P(1)$

- La linéarité de u comme opérateur de $\mathbb{R}_n[X]$ à valeur dans $\mathbb{R}\ [X]$ est claire.
  Il reste à vérifier que le degré de u(P) est bien inférieur ou égal à n.
  Il suffit de le vérifier en calculant les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ ce qui est assez évident.
  Donc **u est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$**.

- Ecrivons la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

- $u(1) = 0 + 1 = 1$
- $u(X) = 1 + X$
- $u(X^2) = 1 + 2X^2$
- $Pour\ i \geq 0;\quad u\left(X^i\right) = 1 + iX^i$

$$\boxed{B = Mat_{(1,X,X^2,\dots,X^n)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & i & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & n \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R}).}$$

B est clairement une matrice triangulaire supérieure donc :

$$\boxed{\det(B) = \prod_{i=1}^{n} i = n!}$$

<u>Complément</u> :

La matrice est inversible et donc u est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.