TD 7 - Algébre linéaire : généralités et déterminants

Exercice 1 Montrer que les vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 2 Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+a=0, \text{ et } x+3az=0\right\}$$
$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(1)=0\}, \qquad E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(0)=1\}$$
$$E_4 = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P'=3\}, \qquad E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+2y+1 \geq 0\right\}.$$

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1,x_2,x_3,x_4) vérifiant l'équation $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 4 Soient $\vec{v_1}(1,2,3,4), \vec{v_2}(2,2,2,6), \vec{v_3}(0,2,4,4), \vec{v_4}(1,0,-1,2), \vec{v_5}(2,3,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. Soient $F = Vect\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$ et $G = Vect\{\vec{v_4},\vec{v_5}\}$. Déterminer une base des sous-espaces $F \cap G$, F, G et $F+G$.

Exercice 5
On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4})$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3})$.
2. $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$.
3. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_1}+\vec{e_4}, \vec{e_4})$.
4. $(3\vec{e_1}+\vec{e_3}, \vec{e_3}, \vec{e_2}+\vec{e_3})$.
5. $(2\vec{e_1}+\vec{e_2}, \vec{e_1}-3\vec{e_2}, \vec{e_4}, \vec{e_2}-\vec{e_1})$.

Exercice 6 Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}\{(1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5)\} \\ G &= \text{Vect}\{(-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\} \end{aligned}$$

Exercice 7 Vérifier que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leurs noyaux (et la dimension des noyaux), et les matrices associés dans les bases canoniques :
a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $f(x,y) = (2x+3y, x+y)$
b) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $f(x,y,z) = (2x+y+z, -x+y, 3x+y+2z)$
c) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $f(x,y,z) = (x+y+z, y+2z, x-z)$

Exercice 8 Soit f un endomorphisme défini sur E de dimension 2. On suppose que $f \circ f = 0$ et $f \neq 0$.
a) Montrer qu'il existe a tel que $f(a) \neq 0$.
b) On pose $b = f(a)$. Montrer que (a,b) est une base de E.
c) Quelle est la matrice associée à f dans la base (a,b) ?

Exercice 9 Soient E l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 et δ l'endomorphisme de E qui à un polynôme associe son polynôme dérivé.
a) Ecrire la matrice C de δ dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ de E.
b) Ecrire la matrice B de δ dans la base $\mathcal{B} = (1, 1+X, 1+X^2, 1+X^3)$.

Exercice 10 — Calculer les déterminants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}, \ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}, \ \Delta_6 = \begin{vmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & c+d+a \\ a & c & c^2 & d+a+b \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{vmatrix}, \ \Delta_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 11 — A est une matrice de taille n, antisymétrique (c'est-à-dire que ${}^tA = -A$).
Montrer que si A est inversible, n est pair.

Exercice 12 — Déterminer le déterminant des matrices de taille n de coefficients a_{ij} dans les cas suivants :

1. $a_{ij} = i^3 + 3i^2 - 5$
2. $a_{ij} = ij$
3. $a_{ij} = i + j$

Exercice 13 — Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ le rang des matrices $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$ et $N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 — Soit A la matrice de taille n suivante, où a, b, c sont des réels (on suppose $b \neq c$).

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \ddots & b \\ c & c & a & \ddots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{pmatrix}$$

On note B la matrice de taille n avec tous ses coefficents égaux à 1.
a) On introduit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \det(A + xB)$
Que valent $f(-c)$ et $f(-b)$?
b) Montrer que la fonction f peut s'écrire $f(x) = \alpha x + \beta$, avec α et β deux réels.
c) Déterminer α et β grâce à la question a).
d) Que vaut $\det A$?

Exercice 17 —
Soit u l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $u(P) = P + P'$. Calculer $\det u$. Même question lorsque $u(P) = XP' + P(1)$.