# TD 9 — Espaces euclidiens

**Exercice 1** Soit $E$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de la forme $aX^2 + bX + c$. On définit pour $P \in E$, $Q \in E$ :

$$< P|Q >= \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

a) Montrer que cela définit un produit scalaire sur $E$.
b) Déterminer une base orhonormale $(P_0, P_1, P_2)$ de $E$ (avec $P_k$ de degré $k$).

**Exercice 2** Soit $E$ un espace euclidien. $\alpha$ est un réel. On suppose que $a$, $b$ et $c$ sont trois vecteurs unitaires tels que

$$< a|b >=< a|c >=< b|c >= \alpha$$

a) Montrer que $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. (On pourra introduire le vecteur $u = a + b + c$).
b) Montrer que $(a, b, c)$ est libre si et seulement si $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$

**Exercice 3** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit $F$ le plan vectoriel défini par l'équation $x + y + z = 0$.
a) Déterminer une base orthonormale de $F$.
b) Déterminer $F^\perp$ et en donner une base orthonormale.
c) Déterminer le projeté sur $F$ du vecteur $a = (1, 2, 5)$.
d) Soit $p$ la projection orthogonale sur $F$. Déterminer la matrice de $p$ dans la base canonique.
e) Soit $s$ la symétrie orthogonale par rapport à $F$. Déterminer la matrice de $s$ dans la base canonique.

**Exercice 4** Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales. Décrire l'endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ associé.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5** On considère les matrices $A$ et $B$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que $A$ et $B$ sont deux matrices orthogonales.
b) Montrer que $A$ et $B$ sont des matrices de rotation, dont on déterminera les angles et les axes.
c) Soit la matrice $C = AB$. Calculer $C$. Montrer qu'il s'agit d'une matrice de rotation dont on précisera l'angle et l'axe.

**Exercice 6**
Pour chacune des matrices symétriques réelles suivantes, précisez une matrice diagonale $D$ et une matrice orthogonale $P$ telles que $A = PDP^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$