Fiche de cours	Mathématiques	Troisième
Chapitre 1 : PGCD	Les nombres et PGCD	

Tous les nombres considérés sont des entiers naturels donc appartenant à $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5 \ldots.\}$
On aura : $0 < b \leq a$

I – Diviseurs et multiples.

Définition : Le nombre a est divisible par b ($avec\ b \neq 0$) s'il existe un nombre entier n tel que :

$$a = b \times n.$$

On dit alors que a est un multiple de b et de n.

Autre formulation :

Le nombre entier a est divisible par le nombre b ($avec\ b \neq 0$) si : $\frac{a}{b}$ est un entier $\left(\frac{a}{b} = n \in \mathbb{N}\right)$.

Exemple : $10 = 2 \times 5$ donc 10 est divisible par 2 et par 5, et 10 est un multiple de 2 et 5 (il y en a d'autres). → Pour les critères de divisibilité, voir la fiche E du chapitre 0 : Fractions.

II – Diviseurs communs.

Définition : Un diviseur commun de deux nombres a et b est un nombre qui divise à la fois a et b.

Exemple : 3 est un diviseur commun de 114 et 27 car 3 divise 114 ($114 = 3 \times 38$) et 3 divise 27 ($27 = 3 \times 9$).

III – Plus Grand Diviseur Commun.

Définition :
Le PGCD de deux nombres a et b est le plus grand des diviseurs communs de a et de b.

Définition : Deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est 1, c'est-à-dire lorsqu'ils n'ont comme diviseur commun que le nombre 1.

Exemple : 8 et 27 sont premiers entre eux car ils n'ont comme diviseur commun que 1, leur PGCD est 1.

IV – Algorithmes de calcul du PGCD de deux nombres a et b.

1°) Algorithme des différences :

Cet algorithme repose sur la propriété suivante :

Propriété 1 : Soit a et b deux entiers avec $0 < b \leq a$, alors $\boxed{PGCD(a; b) = PGCD(b; a - b)}$

Exemple : Calculons le PGCD de 675 et 375 par l'algorithme des différences.
Cet algorithme est basé sur la propriété 1 (à citer)
Nommons $A = PGCD(675; 375)$

$$A = PGCD\left(\underbrace{375}_{Le\ plus\ petit} ; \underbrace{300}_{la\ différence\ (675-375)}\right)$$

$$A = PGCD\left(\underbrace{300}_{Le\ plus\ petit} ; \underbrace{75}_{la\ différence\ (375-300)}\right)$$

$$A = PGCD\left(\underbrace{75}_{Le\ plus\ petit} ; \underbrace{225}_{la\ différence\ (300-75)}\right)$$

$$A = PGCD\left(\underbrace{75}_{Le\ plus\ petit} ; \underbrace{150}_{la\ différence\ (225-75)}\right)$$

$$A = PGCD\left(\underbrace{75}_{Le\ plus\ petit} ; \underbrace{75}_{la\ différence\ (150-75)}\right)$$

$$A = 75 \quad Donc\ \boxed{le\ PGCD\ de\ 675\ et\ de\ 375\ est\ 75}.$$

2°) Algorithme d'Euclide :

Cet algorithme repose sur la propriété suivante :

Propriété 2 : Soit a et b deux entiers avec $0 < b \leq a$, alors $\boxed{PGCD(a;b) = PGCD(b;R)}$ où R est le reste de la division euclidienne de a par b.

Dividende	Diviseur	120	7
	Quotient		17
Reste		1	

$$\boxed{Dividende = \text{Diviseur} \times \text{Quotient} + \text{Reste}}$$

$$\boxed{120 = 7 \times 17 + 1}$$

Exemple : Calculons le PGCD de 675 et 375 par l'algorithme des différences.

Cet algorithme est basé sur la propriété 2 (à citer)

Nommons $A = PGCD(675; 375)$

$$675 = 375 \times 1 + \underbrace{300}_{Le\ reste} \quad donc \quad A = PGCD\left(\underbrace{375}_{Le\ diviseur} ; \underbrace{300}_{Le\ reste}\right)$$

$$375 = 300 \times 1 + \underbrace{75}_{Le\ reste} \quad donc \quad A = PGCD\left(\underbrace{300}_{Le\ diviseur} ; \underbrace{75}_{Le\ reste}\right)$$

$$300 = 75 \times 4 + \underbrace{0}_{Le\ reste} \quad donc \quad A = PGCD\left(\underbrace{75}_{Le\ reste} ; \underbrace{0}_{Le\ reste}\right) = 75$$

Donc $\boxed{le\ PGCD\ de\ 675\ et\ de\ 375\ est\ 75}$.

V – Fractions.

Définition : Une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Propriété 3 : Si on simplifie une fraction par le PGCD du numérateur et du dénominateur, alors on obtient une fraction irréductible.

Exemple :

On a vu que le PGCD de 675 et de 375 est 75, donc pour rendre irréductible la fraction $\frac{675}{375}$ on applique la propriété 3.

$$\frac{675}{375} = \frac{\overbrace{75}^{PGCD(675;375)} \times 9}{\underbrace{75}_{PGCD(675;375)} \times 5} = \frac{9}{5}$$

$\frac{9}{5}$ est une fraction irréductible car on a simplifié par le PGCD du numérateur et du dénominateur.