TD n°5 : Factorisation canonique

La factorisation canonique est une méthode qui permet de factoriser des expressions (trinôme) du type : $\boxed{\boldsymbol{ax^2+bx+c\,,(avec\ a\ \neq 0)}}$.

Algorithme et exemple avec le trinôme : $F(x) = x^2 - 6x + 5$

1. **Si $\boxed{a \neq 1}$, on factorise par a.**
   Ici a, le coefficient devant x^2 vaut 1, donc rien à faire.
2. **On cherche à écrire les 2 premiers termes ($en\ x^2\ et\ x$) sous forme de carré**

$$F(x) = \boxed{x^2 - 6x} + 5$$

   On cherche donc à écrire

$$(\ldots\ldots-\ldots)^2 = \boxed{x^2 - 6x} + \cdots$$

   Soit

$$(x-3)^2 = \boxed{x^2 - 6x} + 9$$

   Et donc

$$\boxed{(x-3)^2 - 9 = \boxed{x^2 - 6x}}$$

3. **On remplace alors dans l'expression de départ.**

$$\begin{aligned} F(x) &= \boxed{x^2 - 6x} \qquad + 5 \\ F(x) &= \boxed{(x-3)^2 - 9} + 5 \\ &\boxed{F(x) = \ (x-3)^2 - 4} \end{aligned}$$

4. **On cherche alors à factoriser en utilisant la 3ème identité remarquable (quand c'est possible) : $\boldsymbol{A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)}$.**

   Ici on factorise avec : $A = (x-3)\ et\ B = 2$ En effet

$$\begin{aligned} F(x) &= \ (x-3)^2 - 2^2 \\ F(x) &= \big((x-3)+2\big)\big((x-3)-2\big) \\ &\boxed{\boldsymbol{F(x) = (x-1)(x-5)}} \end{aligned}$$

   Ce qui nous donne une forme factorisée de F

5. **Vérification : On peut alors au brouillon, redévelopper l'expression obtenue pour vérifier le résultat.**

$$\begin{aligned} (x-1)(x-5) &= x^2 - 5x - x + 5 \\ &= x^2 - 6x + 5 \\ &= F(x) \end{aligned}$$

Exercice 1.

A l'aide d'une factorisation canonique, montrer les égalités suivantes.

1. $A(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$
2. $B(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$
3. $C(x) = x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$
4. $D(x) = x^2 - 11x + 30 = (x-5)(x-6)$
5. $E(x) = x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$
6. $F(x) = 2x^2 - 8x - 10 = 2(x-5)(x+1)$
7. $G(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2)$
8. $H(x) = 5x^2 + 15x + 10 = 5(x+1)(x+2)$
9. $I(x) = 5x^2 - 5x + \frac{5}{4} = 5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
10. $J(x) = 6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - \frac{1}{3})$

Exercice 2.

La factorisation canonique n'aboutit pas toujours. En effet, à la fin de l'étape 3, on obtient parfois une expression du type $(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2)$, et qui n'est pas (à notre niveau) factorisable.

A l'aide d'une factorisation canonique, montrer les égalités suivantes.

1. $K(x) = x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$
2. $L(x) = x^2 - 2x + 6 = (x-1)^2 + 5$
3. $M(x) = 2x^2 - 8x + 10 = 2((x-2)^2 + 1)$
4. $N(x) = x^2 + 8x + 21 = (x+4)^2 + 5$
5. $O(x) = 2x^2 + 12x + 19 = 2\left(\ (x+3)^2 + \frac{1}{2}\right)$

Exercice 3.

On considère l'expression : $P(x) = \ x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1. A l'aide d'un développement, montrer que :
$$P(x) = (x-3)(x^2 + x - 2)$$
2. Factoriser le trinôme $(x^2 + x - 2)$ à l'aide d'une factorisation canonique.
3. En déduire que la factorisation de $P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$

Exercice 4.

On considère l'expression : $Q(x) = x^4 + \ x^3 - 19x^2 - 49x - 30$

1. Factoriser le trinôme $R(x) = (x^2 + 3x + 2)$ à l'aide d'une factorisation canonique.
2. Factoriser le trinôme $S(x) = (x^2 - 2x - 15)$ à l'aide d'une factorisation canonique.
3. Montrer que : $Q(x) = R(x) \times S(x)$
4. En déduire alors la factorisation de $Q(x) = (x-5)(x+1)(x+2)(x+3)$.