TD d’exercices de développements, factorisations et de calculs de valeurs.

Exercice 1. Exercice autocorrectif

On considère les fonctions a, b, c et d définies par :

$$a(x) = (x+1)^2 - (x+1)(2-4x) \quad ; \quad b(x) = (x+1)(2x-3) - (2x-3)(2-3x)$$

$$c(x) = (1-2x)^2 - 16 \quad ; \quad d(x) = (2-3x)^2 - (x+1)^2$$

1. Montrer que :

$$a(x) = 5x^2 + 4x - 1 \ ; \ b(x) = 8x^2 - 14x + 3 \ ; \ c(x) = 4x^2 - 4x - 15 \ \ et \ \ d(x) = 8x^2 - 14x + 3$$

2. Montrer que :

$$a(x) = (x+1)(5x-1) \, ; \ b(x) = (2x-3)(4x-1) \, ; \ c(x) = (2x-5)(2x+3) \ \ et \ \ d(x) = (2x-3)(4x-1)$$

3. Montrer que :

x	-2	$\frac{2}{3}$	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	$-2\sqrt{5}$
$a(x)$	11	$\frac{35}{9}$	-1	$9+4\sqrt{2}$	$14-4\sqrt{3}$	$98-8\sqrt{5}$
$b(x)$	63	$-\frac{25}{9}$	3	$19-14\sqrt{2}$	$27-14\sqrt{3}$	$163+28\sqrt{5}$
$c(x)$	9	$-\frac{143}{9}$	-15	$-7-4\sqrt{2}$	$-3+4\sqrt{3}$	$65+8\sqrt{5}$
$d(x)$	63	$-\frac{25}{9}$	3	$19-14\sqrt{2}$	$27-14\sqrt{3}$	$163+28\sqrt{5}$

4. Montrer que les images de $\left(\frac{1}{2}\right)$ par a, b, c et d sont respectivement : $\frac{9}{4}; \, -2 \, ; \, -16 \ et -2$.
5. Montrer que les antécédents de 0 par a sont : $-1 \ et \ \frac{1}{5}$.
6. Montrer que les antécédents de 0 par b sont : $\frac{3}{2} \ et \ \frac{1}{4}$.
7. Montrer que les antécédents de 0 par c sont : $\frac{5}{2} \ et \ -\frac{3}{2}$.
8. Montrer que l’unique solution de l’équation : $a(x) + 3x^2 = b(x)$ est $x = \frac{2}{9}$.
9. Montrer que l’unique solution de l’équation : $c(x) + 4x^2 = b(x) - 5$ est $x = \frac{13}{10}$.

Exercice 2. (Brevet 2006)

On donne :

D = $(2x - 3)(5 - x) + (2x - 3)^2$

1) Développer et réduire D.

2) Factoriser D.

3) Résoudre l'équation : $(2x - 3)(x + 2) = 0$

Exercice 3. (Brevet 2006)

Soit D = $(2x + 3)^2 + (2x + 3) (7x - 2)$.

1) Développer et réduire D.

2) Factoriser D.

3) Calculer D pour $x = -4$.

4) Résoudre l'équation $(2x + 3) (9x + 1) = 0$.

Exercice 4. (Brevet 2006)

On considère l'expression : $E = (3x + 2)^2 - (5 - 2x)(3x + 2)$.

1) Développer et réduire l'expression E.

2) Factoriser E.

3) Calculer la valeur de E pour $x = -2$.

4) Résoudre l'équation $(3x + 2) (5x - 3) = 0$.

Les solutions de cette équation sont-elles des nombres décimaux ?

Exercice 5. (Brevet 2005)

On donne l'expression $A = (2x - 3)^2 - (4x + 7)(2x - 3)$

1) Développer et réduire A.

2) Factoriser A.

3) Résoudre l'équation $(2x - 3) (-2x - 10) = 0$.

Exercice 6. (Brevet 2005)

On considère l'expression $E = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 2)$.

1. Développer et réduire l'expression E .

2. Factoriser $4x^2 - 9$. En déduire la factorisation de l'expression E .

3. *a*) Résoudre l'équation $(2x + 3)(3x - 5) = 0$.
b) Cette équation a-t-elle une solution entière ?
c) Cette équation a-t-elle une solution décimale ?

Correction du TD d'exercices de développements, factorisations et de calculs de valeurs.

Correction Exercice 2. (Brevet 2006)

1) Développer et réduire D.

$$D = (2x - 3)(5 - x) + (2x - 3)^2 = (2x\times5 - 3\times5 - 2x\times x + 3\times x) + \left((2x)^2 - 2\times2x\times3 + 3^2\right) = 10x - 15 - 2x^2 + 3x + 4x^2 - 12x + 9$$

$$D = (4 - 2)\ x^2 + (10 + 3 - 12)\ x - 15 + 9 = 2\ x^2 + x - 6$$

2) Factoriser D.

$$D = (2x - 3)(5 - x) + (2x - 3)^2 = (2x - 3)\ [(5 - x) + (2x - 3)] = (2x - 3)\ (5 - x + 2x - 3) = (2x - 3)\ ((2-1)\ x + 5 - 3) = (2x - 3)\ (x + 2)$$

3) Résoudre l'équation : $(2x - 3)(x + 2) = 0$

Un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul,

$2x - 3 = 0$ si $2x = 3$ soit $x = 3/2 = 1{,}5$; $x + 2 = 0$ si $x = -2$

L'équation a deux solutions : -2 et 1,5.

Correction Exercice 3. (Brevet 2006)

1) Développer et réduire D.

$$D = (2x + 3)^2 + (2x + 3)(7x - 2) = \left((2x)^2 + 2\times2x\times3 + 3^2\right) + (2x\times7x + 3\times7x - 2x\times2 - 3\times2)$$

$$D = \left(4x^2 + 12x + 9\right) + \left(14x^2 + 21x - 4x - 6\right) = (4+14)x^2 + (12+21-4)x + 9 - 6 = 18x^2 + 29x + 3$$

2) Factoriser D.

$$D = (2x + 3)^2 + (2x + 3)(7x - 2) = (2x + 3)\ [(2x + 3) + (7x - 2)] = (2x + 3)\ ((2+7)x + 3 - 2) = (2x + 3)\ (9x + 1)$$

3) Calculer D pour $x = -4$.

Prenons la forme factorisée : $D = (2\times(-4) + 3)\ (9\times(-4) + 1) = (-8 + 3)\ (-36 + 1) = (-5) \times (-35) = 175$

On peut vérifier les réponses aux questions précédentes en reprenant le calcul à partir de la forme développée :

$$D = 18\times(-4)^2 + 29\times(-4) + 3 = 18\times16 - 116 + 3 = 288 - 116 + 3 = 175$$

4) Résoudre l'équation $(2x + 3) (9x + 1) = 0$.

Un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$2x + 3 = 0$ si $2x = -3$ soit $x = -\frac{3}{2}$; $9x + 1 = 0$ si $9x = -1$ soit $x = -\frac{1}{9}$

L'équation a deux solutions : $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{9}$

Correction Exercice 4. (Brevet 2006)

1) Développer et réduire l'expression E.

$$E = (3x+2)^2 - (5-2x)(3x+2) = \left((3x)^2 + 2\times 3x\times 2 + 2^2\right) - (5\times 3x - 2x\times 3x + 5\times 2 - 2x\times 2)$$

$$E = \left(9x^2 + 12x + 4\right) - \left(15x - 6x^2 + 10 - 4x\right) = 9x^2 + 12x + 4 - 15x + 6x^2 - 10 + 4x = (9+6)x^2 + (12-15+4)x + 4-10 = 15x^2 + x - 6$$

2) Factoriser E.

$$E = (3x+2)^2 - (5-2x)(3x+2) = (3x+2)\ [(3x+2) - (5-2x)] = (3x+2)\ (3x+2-5+2x) = (3x+2)\ (5x-3)$$

3) Calculer la valeur de E pour $x = -2$.

Prenons la forme développée de l'expression :

$$E = 15 \times (-2)^2 + (-2) - 6 = 15\times 4 - 2 - 6 = 60 - 2 - 6 = 52$$

Vérifions nos calculs précédents en effectuant le calcul à partir de la forme factorisée :

$$E = (3\times(-2) + 2)\ (5\times(-2) - 3) = (-6+2)\ (-10-3) = (-4)\times(-13) = 52$$

4) Résoudre l'équation $(3x + 2)\ (5x - 3) = 0$. Les solutions de cette équation sont-elles des nombres décimaux ?

Un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$3x + 2 = 0$ si $3x = -2$ soit $x = -\dfrac{2}{3}$; $5x - 3 = 0$ si $5x = 3$ soit $x = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

L'équation a deux solutions $-\dfrac{2}{3}$ et 0,6. Seule cette deuxième valeur est décimale.

Correction Exercice 5. (Brevet 2005)

1) Développer et réduire A.

$$A = (2x-3)^2 - (4x+7)(2x-3) = [(2x)^2 - 2\times 2x\times 3 + 3^2] - (4x\times 2x - 4x\times 3 + 7\times 2x - 7\times 3) = \left(4x^2 - 12x + 9\right) - \left(8x^2 - 12x + 14x - 21\right)$$

$$A = \left(4x^2 - 12x + 9\right) - \left(8x^2 - 12x + 14x - 21\right) = 4x^2 - 8x^2 + 12x + 12x - 14x + 9 + 21 = -4x^2 - 14x + 30$$

2) Factoriser A.

$$A = (2x-3)^2 - (4x+7)(2x-3) = (2x-3)\ [\ (2x-3) - (4x+7)\ ] = (2x-3)(\ 2x - 3 - 4x - 7) = (2x-3)(-2x-10) = -2\ (2x-3)(x+5)$$

3) Résoudre l'équation $(2x - 3)\ (-2x - 10) = 0$.

Un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul,

$2x - 3 = 0$ si $2x = 3$ soit $x = 3/2 = 1{,}5$; $-2x - 10 = 0$ si $2x = -10$ soit $x = -10/2 = -5$

L'équation a deux solutions 1,5 et -5.

Correction Exercice 6. (Brevet 2005)

1. Développer et réduire l'expression E .

$E = 4x^2 - 9 + (2x \times x - 2x \times 2 + 3 \times x - 3 \times 2) = 4x^2 - 9 + 2x^2 - 4x + 3x - 6 = 6x^2 - x - 15$

2. Factoriser $4x^2 - 9$. En déduire la factorisation de l'expression E .

D'après l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, nous déduisons que $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$

$E = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 2) = (2x + 3)(2x - 3) + (2x + 3)(x - 2) = (2x + 3)(2x - 3 + x - 2) = (2x + 3)(3x - 5)$

3. *a*) Résoudre l'équation $(2x + 3)(3x - 5) = 0$.

Un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul,

$2x + 3 = 0$ lorsque $2x = -3$ soit $x = -\frac{3}{2}$; $3x - 5 = 0$ si $3x = 5$ soit $x = \frac{5}{3}$

L'équation a donc 2 solutions $-\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{3}$.

b) Cette équation a-t-elle une solution entière ? Aucune des solutions n'est entière.

c) Cette équation a-t-elle une solution décimale ? Une solution est décimale, $-\frac{3}{2} = -1,5$