

COURS

Chapitre 3

Variation linéaire : fonctions affines et
suites arithmétiques

Version élève



Fil directeur du chapitre

Reconnaître une évolution linéaire : une grandeur augmente ou diminue d'une même quantité à chaque étape. On la modélise par une fonction affine ou par une suite arithmétique.

Sommaire du chapitre

I	Fonctions affines et droites	1
II	Coefficient directeur et taux d'accroissement	4
III	Variations d'une fonction affine	5
IV	Suites arithmétiques : une évolution par étapes	5
V	Variations et représentation graphique	8
VI	Modéliser une variation linéaire et résoudre un seuil	10
VII	Utiliser un tableur	11
VIII	Bilan du chapitre	11

I Fonctions affines et droites

Définition 1 (Fonction affine)

Une fonction affine (*linear function*) est une fonction définie sur un intervalle par une expression de la forme

$$f(x) = mx + p,$$

où m et p sont deux nombres réels.

- Le nombre m est le coefficient directeur (*slope*).
- Le nombre p est l'ordonnée à l'origine (*y-intercept*).

La représentation graphique (*graph*) d'une fonction affine est une droite (*straight line*). Sur un intervalle de temps, elle décrit une évolution dont la variation pour une unité de temps est constante.


Remarque

Attention au faux ami ! En anglais américain scolaire, *linear function* désigne généralement une fonction de la forme $f(x) = mx + p$: c'est notre **fonction affine**. En français, une **fonction linéaire** est un cas particulier, de la forme $f(x) = mx$ (donc $p = 0$), dont la droite passe par l'origine. Le terme anglais *affine function* existe aussi, notamment en mathématiques plus avancées.


Exemple guidé

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 2x - 3.$$

1. Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.
2. Calculer $f(0)$ et $f(4)$.

.....

.....

.....

.....


Lire une équation de droite sur un graphique

Pour une droite non verticale, on cherche une équation de la forme $y = mx + p$.

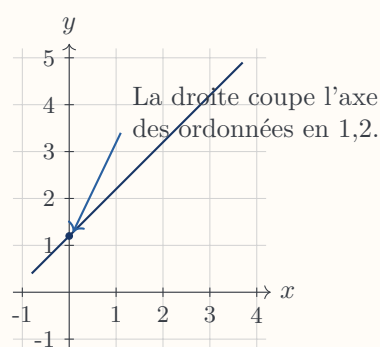
- p se lit à l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.
- m mesure la variation de y lorsque x augmente de 1.
- Plus généralement,

$$m = \frac{\text{variation verticale}}{\text{variation horizontale}}$$

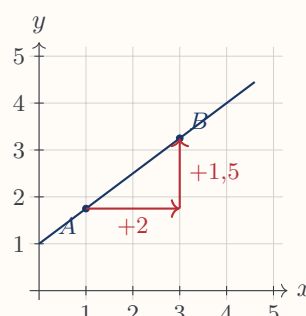
On parle aussi de *pente* de la droite.


Lecture graphique : ordonnée à l'origine et coefficient directeur

Les deux graphiques suivants montrent comment lire p et m .

Graphique 1 : lire p


On lit donc $p=1,2$.

Graphique 2 : lire m


Quand x augmente de 2, y augmente de 1,5, donc

$$m = \frac{1,5}{2} = 0,75$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....



1. Lire l'ordonnée à l'origine p .
2. Lire le coefficient directeur m .
3. En déduire une équation de cette droite.

II

Coefficient directeur et taux d’accroissement

Propriété 1 (Coefficient directeur à partir de deux points)

La pente de la droite est le taux d’accroissement (*average rate of change*) de la fonction affine. Si une droite passe par deux points distincts $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$, alors son coefficient directeur est

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

 Exemple guidé

La droite (AB) passe par les points $A(1 ; 4)$ et $B(5 ; 12)$.

1. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB) .
2. Déterminer son équation réduite.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 Remarque

Un coefficient directeur positif correspond à une droite qui monte lorsqu’on se déplace vers la droite. Un coefficient directeur négatif correspond à une droite qui descend.

 Exploiter un tableau de données

Une station relève la hauteur d’eau d’un bassin à intervalles réguliers.

Temps (h)	0	2	5
Hauteur (cm)	18	24	33

On suppose que la hauteur évolue selon un modèle affine $h(t) = mt + p$.

1. Vérifier que les accroissements par heure sont identiques sur les deux intervalles.
2. Déterminer m et p , puis interpréter leur valeur.
3. Prévoir la hauteur au bout de 7 heures selon ce modèle.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III Variations d'une fonction affine

Propriété 2 (Variations d'une fonction affine)

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, alors f est croissante (*increasing*).
- Si $m < 0$, alors f est décroissante (*decreasing*).
- Si $m = 0$, alors f est constante (*constant*).

Exemple guidé

On considère les fonctions

$$f(x) = 3x - 1, \quad g(x) = -2x + 5, \quad h(x) = 7.$$

Donner le sens de variation de chaque fonction.

.....

.....

.....

.....

Résoudre une inéquation avec une fonction affine

Résoudre une inéquation (*inequality*) du type $mx + p \geq c$ revient à résoudre une inéquation du premier degré. Il faut faire attention au signe quand on divise par un nombre négatif.

IV Suites arithmétiques : une évolution par étapes

Définition 2 (Suite numérique (*numerical sequence*))

Une **suite numérique** (*sequence*) est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, ou sur une partie de $\mathbb{N}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. À chaque entier naturel n de son ensemble de définition, elle associe un nombre réel noté $u(n)$, ou plus souvent u_n :

$$u : n \mapsto u(n) = u_n.$$

Le nombre u_n est le **terme d'indice n** (*term of index n*) ; la suite se note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque tous ses indices sont dans $\mathbb{N}$, ou simplement (u_n) quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque

L'indice n est un entier naturel, mais le terme u_n peut être n'importe quel nombre réel. Une suite peut commencer à l'indice 0, 1 ou à un autre indice : il faut donc toujours préciser les valeurs autorisées de n . Le terme u_{n+1} est le **terme suivant** (*next term*) de u_n .



Premiers termes et indices

On connaît les quatre premiers termes d'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$:

$$u_0 = 4, \quad u_1 = -2, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 = 7.$$

1. Donner le terme de rang 2 et l'indice du terme -2 .
2. Cette suite prend-elle nécessairement des valeurs entières ?

.....

.....

.....

Définition 3 (Suite définie explicitement (*explicit formula*))

Une suite (u_n) est définie **explicitement** lorsque son terme u_n est donné directement en fonction de son indice n :

$$u_n = f(n).$$

On peut calculer un terme sans calculer tous les précédents.



Calculer les termes d'une suite explicite

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 2$ par

$$v_n = \frac{1}{n-1}.$$

Calculer v_2 , v_3 et v_5 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Définition 4 (Suite définie par récurrence (*recurrence relation*))

Une suite peut être définie **par récurrence** lorsqu'on donne un **terme initial** et une relation permettant de calculer chaque terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

Dans le cas courant où le terme suivant dépend du précédent, on écrit par exemple :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La donnée du seul terme initial ou de la seule relation de récurrence ne suffit pas à déterminer la suite.



Calculer les termes d’une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Calculer successivement u_1 , u_2 et u_3 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Remarque

Une **suite arithmétique** est un cas particulier de suite définie par récurrence : on ajoute toujours la même quantité au terme précédent. Les deux exemples ci-dessus montrent qu’une suite numérique n’est pas nécessairement arithmétique.

Définition 5 (Définition d’une suite arithmétique)

Une suite (u_n) (*sequence*) définie pour $n \in \mathbb{N}$ est **arithmétique** (*arithmetic sequence*) lorsqu’il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre r est la **raison** (*common difference*). Ainsi, $u_{n+1} - u_n = r$: la variation absolue est constante.



Exemple : population d’arbres

Une parcelle contient initialement 150 arbres. On y plante 12 arbres supplémentaires chaque année, sans perte d’arbres. On note u_n le nombre d’arbres après n années ($n \in \mathbb{N}$).

1. Donner u_0 , puis calculer u_1 et u_2 .
2. Écrire une relation entre u_{n+1} et u_n .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété 3 (Expression explicite (*explicit formula*) d’une suite arithmétique)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Pour tous entiers n et p appartenant à l’ensemble des indices de la suite, on a :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

En particulier :

- Si la suite est définie à partir du rang 0, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + nr.$$

- Si la suite est définie à partir du rang 1, alors, pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r.$$



Calculer un terme à partir d’un rang quelconque

On considère une suite arithmétique (u_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, de raison $r = 4$, telle que $u_3 = 11$. Calculer u_{10} .

.....

.....

.....

.....



Calculer un terme

Reprenons la parcelle d’arbres.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_0 = 150 \\ u_{n+1} = u_n + 12 \end{cases}$$

La suite est arithmétique de raison 12, et de premier terme $u_0 = 150$.

Déterminer u_n , puis le nombre d’arbres après cinq ans.

.....

.....

.....

.....

v Variations et représentation graphique

Propriété 4 (Sens de variation (*monotonicity*) d'une suite arithmétique)

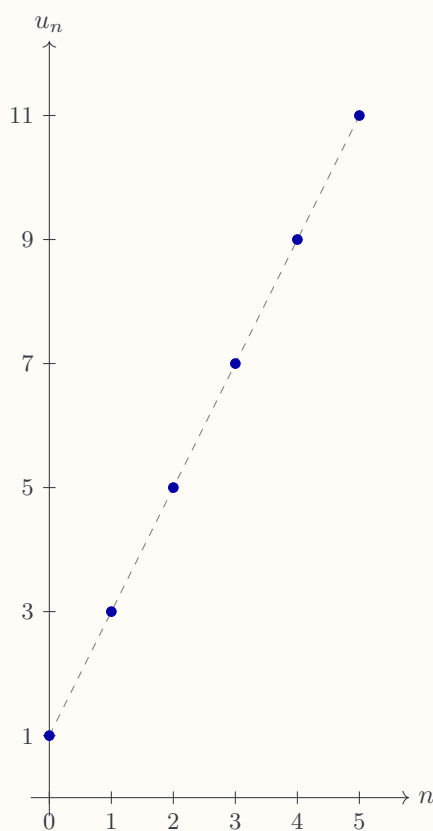
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = r$. Donc :

- si $r > 0$, la suite est strictement croissante ;
- si $r < 0$, la suite est strictement décroissante ;
- si $r = 0$, la suite est constante.



Nuage de points et droite associée

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$.



Les points $(n ; u_n)$ sont alignés, mais seuls les points d'abscisses entières représentent les termes de la suite.

.....

.....

VI

Modéliser une variation linéaire et résoudre un seuil



Reconnaître le modèle adapté

Lorsque la **variation absolue** (*absolute change*) est constante, on utilise :

- une fonction affine $f(x) = mx + p$ pour une grandeur dépendant d’une variable réelle ;
- une suite arithmétique $u_n = u_0 + nr$ pour une grandeur observée par étapes entières.

Une augmentation constante en unités (par exemple 12 arbres par an) n’est pas une augmentation à pourcentage constant.



Exemple : niveau de l'eau

Dans un modèle simplifié, le niveau d’eau mesuré passe de 28 cm à 34 cm en trois heures, avec une augmentation constante par heure. On note $h(t)$ le niveau (en cm) après t heures, pour $t \geq 0$.

1. Déterminer l’expression affine de $h(t)$.
2. Estimer le niveau après 5 heures.

.....

.....

.....

.....

.....



Problème de seuil (*threshold problem*)

Chercher le premier rang où u_n atteint ou dépasse une valeur S consiste à résoudre $u_n \geq S$, puis à retenir le **plus petit entier** (*smallest integer*) admissible. Il faut vérifier que le seuil n’est pas atteint au rang précédent.



À partir de quelle année ?

La parcelle contient $u_n = 150 + 12n$ arbres au bout de n années. Déterminer la première année où elle atteint au moins 250 arbres.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VII Utiliser un tableur



Générer les termes d'une suite (*generate sequence terms*)

Pour la suite arithmétique $u_0 = 80$ et $u_{n+1} = u_n + 15$:

- saisir 0 dans A2 et 80 dans B2 ;
- saisir =A2+1 dans A3 et =B2+15 dans B3 ;
- recopier les formules vers le bas.

On peut ensuite représenter le nuage de points $(n ; u_n)$.

VIII Bilan du chapitre



À retenir

- **Modèle continu** : $f(x) = mx + p$; $m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$ si $x_B \neq x_A$.
- **Modèle discret** : $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_0 + nr$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- Le signe de m ou de r détermine le sens de variation.
- Les points $(n ; u_n)$ d'une suite arithmétique sont alignés.
- Pour un seuil, on résout une inéquation et on choisit le premier rang entier convenable.