

COURS

Chapitre 3

Variation linéaire : fonctions affines et
suites arithmétiques

Version professeur



Fil directeur du chapitre

Reconnaître une évolution linéaire : une grandeur augmente ou diminue d'une même quantité à chaque étape. On la modélise par une fonction affine ou par une suite arithmétique.

Sommaire du chapitre

I	Fonctions affines et droites	1
II	Coefficient directeur et taux d'accroissement	3
III	Variations d'une fonction affine	4
IV	Suites arithmétiques : une évolution par étapes	5
V	Variations et représentation graphique	8
VI	Modéliser une variation linéaire et résoudre un seuil	9
VII	Utiliser un tableur	9
VIII	Bilan du chapitre	11

I Fonctions affines et droites

Définition 1 (Fonction affine)

Une fonction affine (*linear function*) est une fonction définie sur un intervalle par une expression de la forme

$$f(x) = mx + p,$$

où m et p sont deux nombres réels.

- Le nombre m est le coefficient directeur (*slope*).
- Le nombre p est l'ordonnée à l'origine (*y-intercept*).

La représentation graphique (*graph*) d'une fonction affine est une droite (*straight line*). Sur un intervalle de temps, elle décrit une évolution dont la variation pour une unité de temps est constante.


Remarque

Attention au faux ami ! En anglais américain scolaire, *linear function* désigne généralement une fonction de la forme $f(x) = mx + p$: c'est notre **fonction affine**. En français, une **fonction linéaire** est un cas particulier, de la forme $f(x) = mx$ (donc $p = 0$), dont la droite passe par l'origine. Le terme anglais *affine function* existe aussi, notamment en mathématiques plus avancées.


Exemple guidé

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 2x - 3.$$

1. Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.
2. Calculer $f(0)$ et $f(4)$.

Le coefficient directeur est $m = 2$ et l'ordonnée à l'origine est $p = -3$.

$$f(0) = 2 \times 0 - 3 = -3,$$

$$f(4) = 2 \times 4 - 3 = 5.$$


Lire une équation de droite sur un graphique

Pour une droite non verticale, on cherche une équation de la forme $y = mx + p$.

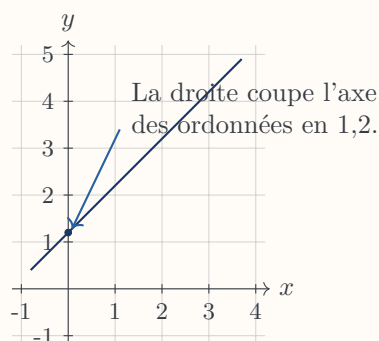
- p se lit à l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.
- m mesure la variation de y lorsque x augmente de 1.
- Plus généralement,

$$m = \frac{\text{variation verticale}}{\text{variation horizontale}}$$

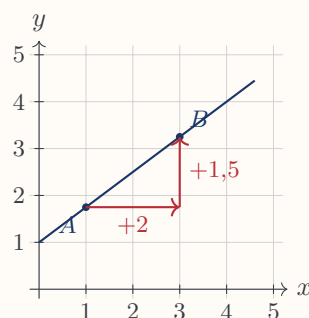
On parle aussi de *pente* de la droite.


Lecture graphique : ordonnée à l'origine et coefficient directeur

Les deux graphiques suivants montrent comment lire p et m .

Graphique 1 : lire p


On lit donc $p=1,2$.

Graphique 2 : lire m


Quand x augmente de 2, y augmente de 1,5, donc

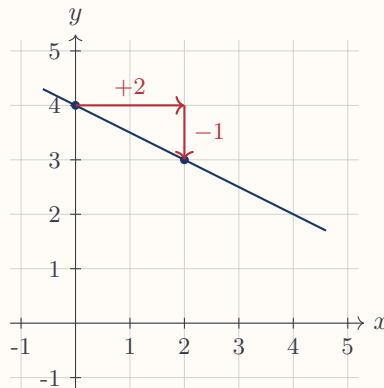
$$m = \frac{1,5}{2} = 0,75$$

Le premier graphique permet de lire directement l'ordonnée à l'origine. Sur le second, on lit la pente à l'aide de deux points de la droite :

$$m = \frac{\text{variation de } y}{\text{variation de } x} = \frac{1,5}{2} = 0,75.$$


Exemple visuel complet

On considère la droite ci-dessous.



1. Lire l'ordonnée à l'origine p .
2. Lire le coefficient directeur m .
3. En déduire une équation de cette droite.

La droite coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 4, donc $p=4$.

Quand x augmente de 2, y diminue de 1, donc

$$m = \frac{-1}{2} = -0,5.$$

Une équation de la droite est donc

$$y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

II Coefficient directeur et taux d'accroissement

Propriété 1 (Coefficient directeur à partir de deux points)

La pente de la droite est le taux d'accroissement (*average rate of change*) de la fonction affine. Si une droite passe par deux points distincts $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$, alors son coefficient directeur est

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$


Exemple guidé

La droite (AB) passe par les points $A(1 ; 4)$ et $B(5 ; 12)$.

1. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB) .
2. Déterminer son équation réduite.

$$\begin{aligned} m &= \frac{12 - 4}{5 - 1} \\ &= \frac{8}{4} \\ &= 2. \end{aligned}$$

La droite a donc une équation de la forme $y = 2x + p$. Comme $A(1 ; 4)$ appartient à la droite :

$$4 = 2 \times 1 + p$$

$$4 = 2 + p$$

$$p = 2.$$

Ainsi, l'équation réduite de la droite est

$$y = 2x + 2.$$



Remarque

Un coefficient directeur positif correspond à une droite qui monte lorsqu'on se déplace vers la droite. Un coefficient directeur négatif correspond à une droite qui descend.



Exploiter un tableau de données

Une station relève la hauteur d'eau d'un bassin à intervalles réguliers.

Temps (h)	0	2	5
Hauteur (cm)	18	24	33

On suppose que la hauteur évolue selon un modèle affine $h(t) = mt + p$.

1. Vérifier que les accroissements par heure sont identiques sur les deux intervalles.

2. Déterminer m et p , puis interpréter leur valeur.

3. Prévoir la hauteur au bout de 7 heures selon ce modèle.

Sur $[0 ; 2]$, le taux d'accroissement est $\frac{24 - 18}{2 - 0} = \frac{6}{2} = 3$ cm/h. Sur $[2 ; 5]$, il vaut $\frac{33 - 24}{5 - 2} = \frac{9}{3} = 3$ cm/h. Les deux taux sont égaux, ce qui est cohérent avec un modèle affine.

On obtient $m = 3$ cm/h et $p = h(0) = 18$ cm. Ainsi,

$$h(t) = 3t + 18.$$

Le niveau initial est de 18 cm et il augmente de 3 cm par heure. Enfin, $h(7) = 3 \times 7 + 18 = 39$ cm.

Variations d'une fonction affine

Propriété 2 (Variations d'une fonction affine)

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, alors f est croissante (*increasing*).
- Si $m < 0$, alors f est décroissante (*decreasing*).
- Si $m = 0$, alors f est constante (*constant*).



Exemple guidé

On considère les fonctions

$$f(x) = 3x - 1, \quad g(x) = -2x + 5, \quad h(x) = 7.$$

Donner le sens de variation de chaque fonction.

La fonction f a pour coefficient directeur $3 > 0$, donc f est croissante.
 La fonction g a pour coefficient directeur $-2 < 0$, donc g est décroissante.
 La fonction h a pour coefficient directeur 0 , donc h est constante.



Résoudre une inéquation avec une fonction affine

Résoudre une inéquation (*inequality*) du type $mx + p \geq c$ revient à résoudre une inéquation du premier degré. Il faut faire attention au signe quand on divise par un nombre négatif.

IV Suites arithmétiques : une évolution par étapes

Définition 2 (Suite numérique (*numerical sequence*))

Une **suite numérique** (*sequence*) est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, ou sur une partie de $\mathbb{N}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. À chaque entier naturel n de son ensemble de définition, elle associe un nombre réel noté $u(n)$, ou plus souvent u_n :

$$u : n \mapsto u(n) = u_n.$$

Le nombre u_n est le **terme d'indice n** (*term of index n*) ; la suite se note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque tous ses indices sont dans $\mathbb{N}$, ou simplement (u_n) quand il n'y a pas d'ambiguïté.



Remarque

L'indice n est un entier naturel, mais le terme u_n peut être n'importe quel nombre réel. Une suite peut commencer à l'indice 0, 1 ou à un autre indice : il faut donc toujours préciser les valeurs autorisées de n . Le terme u_{n+1} est le **terme suivant** (*next term*) de u_n .



Premiers termes et indices

On connaît les quatre premiers termes d'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$:

$$u_0 = 4, \quad u_1 = -2, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 = 7.$$

1. Donner le terme de rang 2 et l'indice du terme -2 .
2. Cette suite prend-elle nécessairement des valeurs entières ?

Le terme de rang 2 est $u_2 = \frac{1}{2}$. Le terme -2 est u_1 : son indice est 1 . Les termes d'une suite numérique sont des réels et ne sont pas nécessairement entiers, comme le montre $u_2 = \frac{1}{2}$.

Définition 3 (Suite définie explicitement (*explicit formula*))

Une suite (u_n) est définie **explicitement** lorsque son terme u_n est donné directement en fonction de son indice n :

$$u_n = f(n).$$

On peut calculer un terme sans calculer tous les précédents.



Calculer les termes d'une suite explicite

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 2$ par

$$v_n = \frac{1}{n-1}.$$

Calculer v_2 , v_3 et v_5 . La suite commence au rang 2. En remplaçant n par chaque indice demandé :

$$v_2 = \frac{1}{2-1} = \boxed{1},$$

$$v_3 = \frac{1}{3-1} = \boxed{\frac{1}{2}},$$

$$v_5 = \frac{1}{5-1} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Définition 4 (Suite définie par récurrence (recurrence relation))

Une suite peut être définie **par récurrence** lorsqu'on donne un **terme initial** et une relation permettant de calculer chaque terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

Dans le cas courant où le terme suivant dépend du précédent, on écrit par exemple :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La donnée du seul terme initial ou de la seule relation de récurrence ne suffit pas à déterminer la suite.



Calculer les termes d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Calculer successivement u_1 , u_2 et u_3 . On utilise à chaque fois le terme précédent :

$$u_1 = 3u_0 - 1 = 3 \times 2 - 1 = \boxed{5},$$

$$u_2 = 3u_1 - 1 = 3 \times 5 - 1 = \boxed{14},$$

$$u_3 = 3u_2 - 1 = 3 \times 14 - 1 = \boxed{41}.$$



Remarque

Une **suite arithmétique** est un cas particulier de suite définie par récurrence : on ajoute toujours la même quantité au terme précédent. Les deux exemples ci-dessus montrent qu'une suite numérique n'est pas nécessairement arithmétique.

Définition 5 (Définition d'une suite arithmétique)

Une suite (u_n) (sequence) définie pour $n \in \mathbb{N}$ est **arithmétique** (arithmetic sequence) lorsqu'il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}.$$

Le nombre r est la **raison** (common difference). Ainsi, $u_{n+1} - u_n = r$: la variation absolue est constante.


Exemple : population d'arbres

Une parcelle contient initialement 150 arbres. On y plante 12 arbres supplémentaires chaque année, sans perte d'arbres. On note u_n le nombre d'arbres après n années ($n \in \mathbb{N}$).

- Donner u_0 , puis calculer u_1 et u_2 .
- Écrire une relation entre u_{n+1} et u_n .

$$\begin{aligned} u_0 &= 150, \\ u_1 &= 150 + 12 = 162, \\ u_2 &= 162 + 12 = 174. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 12$. La suite est arithmétique de raison 12, et de premier terme $u_0 = 150$.

Propriété 3 (Expression explicite (*explicit formula*) d'une suite arithmétique)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Pour tous entiers n et p appartenant à l'ensemble des indices de la suite, on a :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

En particulier :

- Si la suite est définie à partir du rang 0, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + nr.$$

- Si la suite est définie à partir du rang 1, alors, pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r.$$


Calculer un terme à partir d'un rang quelconque

On considère une suite arithmétique (u_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, de raison $r = 4$, telle que $u_3 = 11$. Calculer u_{10} . Pour tous n et p dans $\mathbb{N}$, on a $u_n = u_p + (n - p)r$. En prenant $n = 10$ et $p = 3$:

$$\begin{aligned} u_{10} &= u_3 + (10 - 3)r \\ &= 11 + 7 \times 4 \\ &= \boxed{39}. \end{aligned}$$


Calculer un terme

Reprenons la parcelle d'arbres.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_0 = 150 \\ u_{n+1} = u_n + 12 \end{cases}$$

La suite est arithmétique de raison 12, et de premier terme $u_0 = 150$.

Déterminer u_n , puis le nombre d'arbres après cinq ans. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + nr \\ &= 150 + 12n. \end{aligned}$$

Ainsi $u_5 = 150 + 12 \times 5 = \boxed{210}$: il y aurait 210 arbres après cinq années selon ce modèle.

V Variations et représentation graphique

Propriété 4 (Sens de variation (*monotonicity*) d'une suite arithmétique)

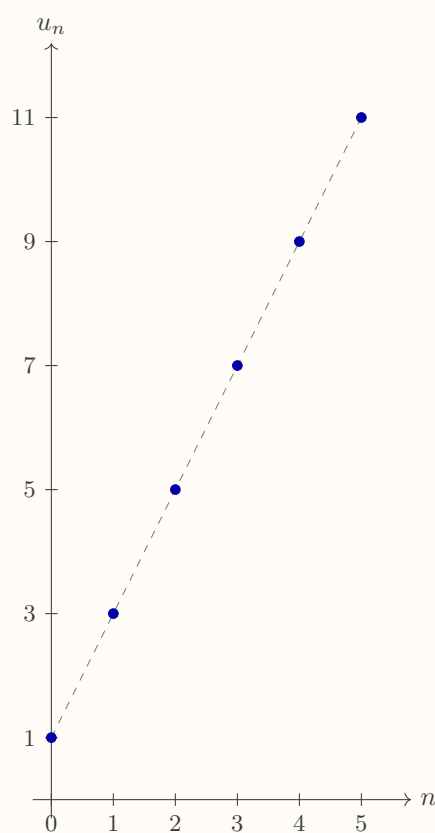
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = r$. Donc :

- si $r > 0$, la suite est strictement croissante ;
- si $r < 0$, la suite est strictement décroissante ;
- si $r = 0$, la suite est constante.



Nuage de points et droite associée

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$.



Les points $(n ; u_n)$ sont alignés, mais seuls les points d'abscisses entières représentent les termes de la suite. Comme $u_{n+1} - u_n = 2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est strictement croissante.

VI Modéliser une variation linéaire et résoudre un seuil



Reconnaître le modèle adapté

Lorsque la **variation absolue** (*absolute change*) est constante, on utilise :

- une fonction affine $f(x) = mx + p$ pour une grandeur dépendant d'une variable réelle ;
- une suite arithmétique $u_n = u_0 + nr$ pour une grandeur observée par étapes entières.

Une augmentation constante en unités (par exemple 12 arbres par an) n'est pas une augmentation à pourcentage constant.



Exemple : niveau de l'eau

Dans un modèle simplifié, le niveau d'eau mesuré passe de 28 cm à 34 cm en trois heures, avec une augmentation constante par heure. On note $h(t)$ le niveau (en cm) après t heures, pour $t \geq 0$.

1. Déterminer l'expression affine de $h(t)$.

2. Estimer le niveau après 5 heures.

La variation horaire vaut $m = \frac{34 - 28}{3 - 0} = 2$ cm par heure. Comme $h(0) = 28$, pour $t \geq 0$, $h(t) = 2t + 28$. Ainsi $h(5) = 2 \times 5 + 28 = \boxed{38}$ cm.



Problème de seuil (*threshold problem*)

Chercher le premier rang où u_n atteint ou dépasse une valeur S consiste à résoudre $u_n \geq S$, puis à retenir le **plus petit entier** (*smallest integer*) admissible. Il faut vérifier que le seuil n'est pas atteint au rang précédent.



À partir de quelle année ?

La parcelle contient $u_n = 150 + 12n$ arbres au bout de n années. Déterminer la première année où elle atteint au moins 250 arbres. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n \geq 250 &\iff 150 + 12n \geq 250 \\ &\iff 12n \geq 100 \\ &\iff n \geq \frac{25}{3}. \end{aligned}$$

Le plus petit entier naturel convenable est 9. De plus, $u_8 = 246 < 250$ et $u_9 = 258 \geq 250$. Le seuil est donc atteint pour la première fois après 9 années.

VII Utiliser un tableur



Générer les termes d'une suite (*generate sequence terms*)

Pour la suite arithmétique $u_0 = 80$ et $u_{n+1} = u_n + 15$:

- saisir 0 dans A2 et 80 dans B2 ;
- saisir =A2+1 dans A3 et =B2+15 dans B3 ;
- recopier les formules vers le bas.

On peut ensuite représenter le nuage de points $(n ; u_n)$.

VIII Bilan du chapitre



À retenir

- **Modèle continu** : $f(x) = mx + p$; $m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$ si $x_B \neq x_A$.
- **Modèle discret** : $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_0 + nr$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- Le signe de m ou de r détermine le sens de variation.
- Les points $(n ; u_n)$ d'une suite arithmétique sont alignés.
- Pour un seuil, on résout une inéquation et on choisit le premier rang entier convenable.