MATH93

Première – Mathématiques intégrées à l'enseignement scientifique

Recueil d'exercices – Entraînement – Méthodes

TD – EXERCICES

Chapitre 3 – TD

Variation linéaire : fonctions affines et suites arithmétiques

Version corrigée

Sommaire du TD

I Fonctions affines : lecture et modélisation 2

II Suites numériques : deux modes de définition 3

III Suites arithmétiques : calculs et variations 3

IV Modélisation et problèmes de seuil 5

V Automatismes de l'épreuve anticipée 7

VI Exercices de l'épreuve anticipée du bac 8

Parcours du TD

Dans chaque partie, faire l'exercice **[!] Bilan**, puis choisir un exercice de **[+] Consolidation** ou de **[*] Approfondissement**. Terminer par les automatismes et les exercices du bac (à choisir selon le temps disponible).

Compétences

- **Savoir lire** le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine d'une droite et **déterminer** l'expression d'une fonction affine.
- **Savoir calculer** les termes d'une suite définie explicitement ou par récurrence.
- **Savoir reconnaître** une suite arithmétique, **calculer** un terme avec $u_n = u_p + (n-p)r$ et **étudier** son sens de variation.
- **Savoir modéliser** une évolution linéaire et **déterminer** le premier rang où un seuil est atteint.

Thème I Fonctions affines : lecture et modélisation

Exercice 1 [!] Bilan Lecture graphique et équation de droite

On considère la droite (d) passant par $A(0\ ;\ 2)$ et $B(3\ ;\ 8)$.

1. Donner l'ordonnée à l'origine p.

2. Calculer le coefficient directeur m.

3. Déterminer l'équation de (d) sous la forme $y = mx + p$.

4. Calculer l'ordonnée du point de (d) d'abscisse 5.

Corrigé

1. Puisque $A(0\ ;\ 2)$ appartient à (d), $\boxed{p = 2}$.

2. Le coefficient directeur est :

$$\begin{aligned} m &= \frac{8-2}{3-0} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2. \end{aligned}$$

3. On obtient $\boxed{y = 2x + 2}$.

4. Pour $x = 5$, $y = 2 \times 5 + 2 = 12$. Donc $\boxed{y = 12}$.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 2, page 2.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 3, page 3.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 2 [+] Consolidation Droite et valeurs

On considère la droite (d) passant par $C(0\ ;\ 4)$ et $D(2\ ;\ 10)$.

1. Donner p.

2. Calculer m.

3. Déterminer l'équation $y = mx + p$.

4. Calculer y pour $x = 5$.

Corrigé

1. $\boxed{p = 4}$.

2. $m = \dfrac{10-4}{2-0} = \dfrac{6}{2} = \boxed{3}$.

3. $\boxed{y = 3x + 4}$.

4. $y = 3 \times 5 + 4 = \boxed{19}$.

Exercice 3 [*] Approfondissement Retrouver une fonction affine

Une grandeur est modélisée par $f(x) = mx + p$. On connaît $f(2) = 11$ et $f(6) = 3$.

1. Déterminer m.

2. Déterminer p.

3. Résoudre $f(x) \geqslant 5$.

Corrigé

1. $m = \dfrac{3-11}{6-2} = \dfrac{-8}{4} = \boxed{-2}$.

2. $f(2) = 11$, donc $-2 \times 2 + p = 11$, d'où $\boxed{p = 15}$.

3. $-2x + 15 \geqslant 5 \iff -2x \geqslant -10 \iff x \leqslant 5$ (on inverse le sens de l'inégalité en divisant par -2). Ainsi $\boxed{x \in]-\infty\ ;\ 5]}$.

Thème II Suites numériques : deux modes de définition

Exercice 4 Mise en route – calculer des termes d'une suite

On rappelle qu'une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$, à valeurs réelles.

1. On définit (a_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = n^2 + 1$. Calculer directement a_0, a_2 et a_5.

2. On définit (b_n) par $b_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 2b_n + 1$. Calculer successivement b_1, b_2 et b_3.

3. Pour chaque suite, calculer les différences entre trois termes consécutifs et expliquer pourquoi elle n'est pas arithmétique.

Corrigé

1. Par définition explicite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n^2 + 1$. Donc

$$\boxed{a_0 = 1}, \qquad \boxed{a_2 = 5}, \qquad \boxed{a_5 = 26}.$$

2. Par récurrence, $b_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 2b_n + 1$. Ainsi :

$$b_1 = 2 \times 2 + 1 = 5,$$
$$b_2 = 2 \times 5 + 1 = 11,$$
$$b_3 = 2 \times 11 + 1 = 23.$$

3. Pour (a_n) : $a_1 = 2$, $a_2 - a_1 = 3$ et $a_1 - a_0 = 1$. Pour (b_n) : $b_1 - b_0 = 3$ et $b_2 - b_1 = 6$. Dans chaque cas, les différences ne sont pas constantes : **aucune de ces suites n'est arithmétique**.

Thème III Suites arithmétiques : calculs et variations

Exercice 5 [!] Bilan Une plantation régulière

Une plantation comporte initialement 120 arbres. On plante 15 arbres chaque année, sans en retirer. On note u_n le nombre d'arbres après n années ($n \in \mathbb{N}$).

1. Donner u_0, u_1 et u_2.

2. Écrire une relation entre u_{n+1} et u_n.

3. Exprimer u_n en fonction de n.

4. Préciser le sens de variation de la suite.

5. En utilisant u_2, calculer directement u_7 avec la formule $u_n = u_p + (n-p)r$.

Corrigé

1. $u_0 = 120$, $u_1 = 120 + 15 = 135$ et $u_2 = 135 + 15 = 150$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + 15}$.

3. La suite est arithmétique de raison 15 ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + 15n$, soit $\boxed{u_n = 120 + 15n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 15 > 0$. La suite est donc strictement croissante.

5. $u_7 = u_2 + (7-2) \times 15 = 150 + 75 = \boxed{225}$.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 6, page 4.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 7, page 4.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 6 [+] Consolidation Une réserve qui augmente

Une réserve contient initialement 85 litres d'eau. On y ajoute 12 litres chaque jour, sans prélèvement. On note v_n le volume après n jours ($n \in \mathbb{N}$).

1. Donner v_0, v_1 et v_2.

2. Écrire la relation de récurrence.

3. Exprimer v_n en fonction de n.

4. Étudier les variations de (v_n).

5. En utilisant v_2, calculer directement v_7 avec la formule $v_n = v_p + (n-p)r$.

Corrigé

1. $v_0 = 85$, $v_1 = 97$, $v_2 = 109$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1} = v_n + 12}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = 85 + 12n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 12 > 0$, donc (v_n) est strictement croissante.

5. $v_7 = v_2 + (7-2) \times 12 = 109 + 60 = \boxed{169}$.

Exercice 7 [*] Approfondissement Comparer deux abonnements

Deux forfaits d'impression sont proposés, pour n pages :

- formule A : 8 euros fixes, puis 0,20 euro par page ;
- formule B : 5 euros fixes, puis 0,35 euro par page.

1. Définir les deux suites de prix a_n et b_n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Déterminer à partir de combien de pages la formule A devient strictement moins chère.

3. Interpréter le résultat.

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{a_n = 8 + 0{,}20n}$ et $\boxed{b_n = 5 + 0{,}35n}$.
2. On cherche $a_n < b_n$:

$$\begin{aligned} 8 + 0{,}20n &< 5 + 0{,}35n \\ 3 &< 0{,}15n \\ n &> 20. \end{aligned}$$

3. Le premier entier naturel qui convient est 21 : à partir de $\boxed{21 \text{ pages}}$, la formule A est strictement moins chère. À 20 pages, les deux prix sont égaux.

Thème IV Modélisation et problèmes de seuil

Exercice 8 [!] Bilan Atteindre un objectif

Une association a déjà collecté 180 kg de matériel et récupère 25 kg supplémentaires chaque semaine. On note u_n la masse totale collectée après n semaines.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Résoudre $u_n \geqslant 400$.
3. Donner la première semaine où l'objectif de 400 kg est atteint, en vérifiant le rang précédent.

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 180 + 25n}$.
2. $180 + 25n \geqslant 400 \iff 25n \geqslant 220 \iff n \geqslant \dfrac{44}{5} = 8{,}8$.
3. Le plus petit entier est 9. Or $u_8 = 380 < 400$ et $u_9 = 405 \geqslant 400$. Le seuil est atteint pour la première fois $\boxed{\text{après 9 semaines}}$.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 9, page 5.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 10, page 6.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 9 [+] Consolidation Une réserve de livres

Une bibliothèque possède 140 livres dans une collection et en achète 18 supplémentaires chaque mois. On note v_n le nombre de livres après n mois.

1. Exprimer v_n en fonction de n.
2. Résoudre $v_n \geqslant 300$.
3. Déterminer le premier mois où le seuil est atteint et vérifier le rang précédent.

Aide aux calculs

Pour faciliter les calculs sans calculatrice, on donne les résultats suivants (certains sont inutiles).

$18 \times 8 = 144$	$18 \times 9 = 162$
$18 \times 7 = 126$	$16 \times 10 = 160$
$20 \times 8 = 160$	$18 \times 10 = 180$

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = 140 + 18n}$.
2. $140 + 18n \geqslant 300 \iff n \geqslant \dfrac{160}{18} = \dfrac{80}{9}$.
3. Comme $8 < \dfrac{80}{9} < 9$, le plus petit entier est 9. De plus $v_8 = 284 < 300$ et $v_9 = 302 \geqslant 300$. Le seuil est atteint $\boxed{\text{au bout de 9 mois}}$.

Exercice 10 [*] Approfondissement Quand deux modèles se croisent

Deux associations organisent une collecte :

- A possède déjà 250 objets et en reçoit 12 par semaine ;
- B possède déjà 100 objets et en reçoit 27 par semaine.

1. Exprimer a_n et b_n au bout de n semaines.
2. Déterminer le premier rang où B possède strictement plus d'objets que A.
3. Expliquer pourquoi ce premier rang n'est pas celui où les deux quantités sont égales.

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 250 + 12n$ et $b_n = 100 + 27n$.
2. $b_n > a_n \iff 100 + 27n > 250 + 12n \iff 15n > 150 \iff n > 10$. Le premier rang est $\boxed{n = 11}$.
3. Au rang 10, $a_{10} = 370 = b_{10}$. Il faut attendre le rang 11 pour avoir une inégalité stricte.

Thème V Automatismes de l'épreuve anticipée

Exercice 11 Questions à réponses courtes

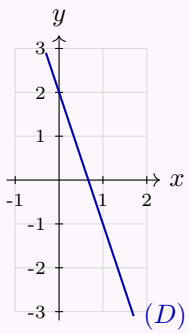
Source bac : Automatismes adaptés des sujets zéro 1 et 3 et des sujets de septembre 2026 (Polynésie et Métropole). Certaines questions sont des créations pédagogiques.

AUTOMATISMES – QUESTIONS À RÉPONSES COURTES

Pour chaque question, écrire une réponse courte sur la copie, en indiquant son numéro. Il n'est pas demandé de détailler les calculs.

1. Une droite passe par les points $A(3\ ;\ -1)$ et $B(1\ ;\ 3)$. Donner une expression de la fonction affine qu'elle represente.

2. Donner le coefficient directeur de la droite (D) ci-dessous.



3. On a $T_F = 1{,}8T_C + 32$. Quelle temperature en degres Fahrenheit correspond a $T_C = -10$ degres Celsius ?

4. On considère $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner u_3.

5. Une suite arithmétique a pour raison -5. Est-elle croissante ou décroissante ?

6. Une suite arithmétique vérifie $u_3 = 12$ et a pour raison 4. Donner u_5.

FIN DES AUTOMATISMES

À partir de l'exercice suivant, toutes les réponses doivent être justifiées. Les calculs et les raisonnements doivent apparaître sur la copie.

Corrigé

1. $m = \dfrac{3-(-1)}{1-3} = \dfrac{4}{-2} = -2$. Comme $-1 = -2 \times 3 + p$, $p = 5$. Donc $\boxed{f(x) = -2x + 5}$.

2. La droite passe par $(0\ ;\ 2)$ et $(1\ ;\ -1)$: $m = \dfrac{-1-2}{1-0} = \boxed{-3}$.

3. $T_F = 1{,}8 \times (-10) + 32 = -18 + 32 = \boxed{14}$.

4. $u_3 = u_0 + 3 \times 4 = 10 + 12 = \boxed{22}$.

5. La raison est strictement négative : la suite est $\boxed{\text{décroissante}}$.

6. $u_5 = u_3 + (5-3) \times 4 = 12 + 8 = \boxed{20}$.

Thème VI Exercices de l'épreuve anticipée du bac

Exercice 12 Refroidissement d'un plat – modèle affine

Source bac : Sujet zéro n° 3, voie générale sans spécialité, exercice 1, partie A – adapté.

Un plat sort du four à 180 °C. On le laisse refroidir dans une pièce à 25 °C. Il pourra être servi dès que sa température ne dépassera plus 40 °C.
Un premier modèle suppose que la température du plat diminue de la même quantité chaque minute. Au bout de 3 minutes, elle vaut 105 °C.

1. Calculer la baisse de température en trois minutes, puis la baisse par minute.

2. Donner l'expression de la température $T(t)$, en degrés Celsius, après t minutes selon ce modèle.

3. Vérifier que $T(5) = 55$.

4. Calculer $T(8)$ et expliquer pourquoi ce modèle ne peut pas être pertinent sur une longue durée.

Corrigé

1. La température diminue de $180 - 105 = 75$ °C en 3 minutes ; la baisse par minute vaut $75/3 = \boxed{25\,°\text{C}}$.

2. À l'instant initial $T(0) = 180$ et le coefficient directeur est -25. Donc, pour $t \geqslant 0$, $\boxed{T(t) = 180 - 25t}$.

3. $T(5) = 180 - 25 \times 5 = 180 - 125 = \boxed{55\,°\text{C}}$.

4. $T(8) = 180 - 25 \times 8 = \boxed{-20\,°\text{C}}$. Cette valeur est inférieure à la température ambiante 25 °C, alors que le plat refroidit dans cette pièce : le modèle affine n'est donc pas pertinent sur une longue durée.

Exercice 13 Démographie et tableur – modèle arithmétique

Source bac : Polynésie, 4 septembre 2026, exercice 1 – extrait adapté (questions sur les décès et le tableur).

En 2025, une étude démographique estime à 40 000 le nombre de décès dans une population. On suppose que ce nombre augmente de 900 chaque année. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note v_n le nombre de décès prévu en $2025 + n$.

1. Donner v_0 et calculer v_1. Interpréter v_1.

2. Justifier que (v_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison.

3. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Déterminer v_{10}, puis préciser l'année correspondante.

5. Dans un tableur, la cellule C2 contient 40 000 et la cellule C3 doit calculer le terme suivant. Quelle formule saisir dans C3 pour pouvoir la recopier vers le bas ?

Corrigé

1. $v_0 = 40\,000$ et $v_1 = 40\,000 + 900 = \boxed{40\,900}$. Il s'agit du nombre de décès prévu en 2026.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 900$. La différence $v_{n+1} - v_n$ est constante, égale à 900. La suite est donc arithmétique de raison $\boxed{r = 900}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr$, soit $\boxed{v_n = 40\,000 + 900n}$.

4. $v_{10} = 40\,000 + 900 \times 10 = \boxed{49\,000}$. Cela correspond à l'année $2025 + 10 = \boxed{2035}$.

5. On saisit `=C2+900` dans C3, puis on recopie vers le bas.

Exercice 14 Une population animale en diminution – seuil

Source bac : Antilles-Guyane, 11 septembre 2026, exercice 2 – questions regroupées et adaptées.

Une zoologiste étudie une population de 2 500 animaux au 1er mars 2025. Elle estime que cette population diminue de 100 individus chaque année. On note u_n le nombre d'individus au 1er mars de l'année $2025+n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner u_0 et u_1, puis une relation entre u_{n+1} et u_n.

2. En déduire la nature et la raison de la suite (u_n), puis exprimer u_n en fonction de n.

3. Justifier son sens de variation.

4. À partir du 1er mars de quelle année cette population sera-t-elle strictement inférieure à 1 250 individus ? Vérifier avec les deux rangs qui encadrent le seuil.

Corrigé

1. $u_0 = 2\,500$ et $u_1 = 2\,500 - 100 = \boxed{2\,400}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n - 100}$.

2. La suite est arithmétique de raison $r = -100$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 2\,500 - 100n}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -100 < 0$; la suite est strictement décroissante.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n < 1\,250 &\iff 2\,500 - 100n < 1\,250 \\ &\iff -100n < -1\,250 \\ &\iff n > 12{,}5. \end{aligned}$$

Le plus petit entier naturel convenable est 13. En effet, $u_{12} = 1\,300 \geqslant 1\,250$ et $u_{13} = 1\,200 < 1\,250$. La population passe sous le seuil le 1er mars $\boxed{2038}$.

Exercice 15 Dépréciation d'un téléphone – modèle arithmétique

Source bac : Métropole, 11 septembre 2026, exercice 2 – extrait adapté.

En 2025, Jean achète un téléphone d'une valeur de 1 060 euros. On suppose que sa valeur diminue de 100 euros chaque année. On note u_n la valeur (en euros) du téléphone en $2025+n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner u_0, puis calculer u_1 et u_2.

2. Préciser la nature et la raison de la suite, puis donner son expression explicite.

3. À partir de quelle année la valeur aura-t-elle perdu **strictement plus de la moitié** de sa valeur initiale ?

Corrigé

1. $u_0 = 1\,060$, $u_1 = 1\,060 - 100 = \boxed{960}$ et $u_2 = 960 - 100 = \boxed{860}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 100$: la suite est arithmétique de raison -100. Ainsi $\boxed{u_n = 1\,060 - 100n}$.

3. La moitié de la valeur initiale vaut $1\,060/2 = 530$ euros. La perte est strictement supérieure à la moitié lorsque $u_n < 530$:

$$\begin{aligned} 1\,060 - 100n < 530 &\iff -100n < -530 \\ &\iff n > 5{,}3. \end{aligned}$$

Le premier entier convenable est $n = 6$: $u_5 = 560 > 530$ et $u_6 = 460 < 530$. La condition est réalisée à partir de $\boxed{2031}$.

Fin du TD