

COURS

Chapitre 1

Équations et fonctions polynômes du second degré

Version professeur

Sommaire du chapitre

I	Introduction historique	2
II	Fonctions polynômes du second degré	3
III	Équations du second degré	6
IV	Factoriser un trinôme : choisir une stratégie	9
V	Signe d'un trinôme du second degré	10
VI	Variations et représentation graphique	11
VII	Prolongement : somme et produit des racines	13
VIII	Bilan	15



ROC du chapitre : résolution de l'équation du second degré

Démonstration à connaître. À partir de l'identité obtenue par complétion du carré, établir les trois cas de résolution de

$$ax^2 + bx + c = 0$$

selon le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

I Introduction historique

I.1 Du problème géométrique à la formule générale



Un long chemin vers le second degré

Les équations du second degré apparaissent bien avant l'écriture algébrique moderne. Diophante, puis Al-Khwârizmî, développent des méthodes permettant de résoudre certaines équations quadratiques. Chez Al-Khwârizmî, la méthode repose encore en partie sur des constructions géométriques qui correspondent, avec notre langage actuel, à une forme de **complétion du carré** (*completing the square*).

Le formalisme moderne permet aujourd'hui de relier plusieurs points de vue : expression développée, forme canonique, racines, factorisation, signe et représentation graphique.



Objectifs du chapitre

- Reconnaître une fonction polynôme du second degré et identifier ses coefficients.
- Connaître les trois écritures utiles d'un trinôme : développée, canonique et factorisée.
- Déterminer une forme canonique **dans des cas simples** par complétion du carré.
- Résoudre une équation du second degré et connaître la démonstration générale à l'aide du discriminant.
- Factoriser en choisissant une stratégie adaptée : facteur commun, identité remarquable ou formules générales.
- Étudier le signe d'un trinôme du second degré.
- Utiliser la forme canonique pour lire le sommet, l'axe de symétrie et les variations d'une parabole.
- Choisir la forme la plus adaptée dans une résolution de problème.

II

Fonctions polynômes du second degré

II.1

Définition

Définition 1 (Fonction polynôme du second degré)

Une **fonction polynôme du second degré** (*quadratic function*), ou **trinôme du second degré** (*quadratic trinomial*), est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a , b et c sont des réels fixés avec $a \neq 0$.
Les réels a , b et c sont les **coefficients** (*coefficients*) du trinôme.

 Identifier les coefficients

Pour chacune des expressions suivantes, identifier a , b et c lorsque cela est possible.

1. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$;
2. $g(x) = -3x^2 + 9$;
3. $h(x) = x^2 + 2x$;
4. $k(x) = 2x - 7$.

$f(x) = 3x^2 + 2x - 1 \implies (a, b, c) = (3, 2, -1),$

$g(x) = -3x^2 + 9 \implies (a, b, c) = (-3, 0, 9),$

$h(x) = x^2 + 2x \implies (a, b, c) = (1, 2, 0).$

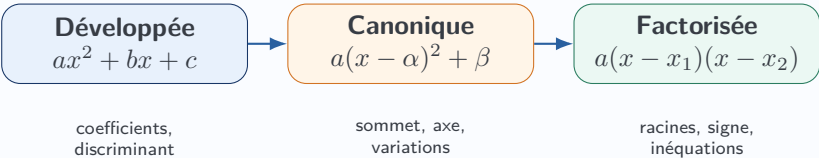
La fonction k est affine : ce n'est pas une fonction polynôme du second degré.

II.2

Trois formes pour un même trinôme

 Trois écritures, trois usages

Un même trinôme peut, lorsque cela est possible, être écrit sous plusieurs formes :



Forme	Écriture	Particulièrement utile pour
Développée réduite (<i>standard form</i>)	$ax^2 + bx + c$	identifier les coefficients et calculer le discriminant ;
Canonique (<i>vertex form</i>)	$a(x - \alpha)^2 + \beta$	lire le sommet, l'axe de symétrie, un extremum et les variations ;
Factorisée (<i>factored form</i>)	$a(x - x_1)(x - x_2)$	lire les racines, résoudre $f(x) = 0$ et étudier le signe.

II.3 Forme canonique et complétion du carré

Propriété 1 (Existence de la forme canonique)

Toute fonction polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

où $a \neq 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Cette écriture est appelée **forme canonique** (*vertex form*).



Compléter le carré (*completing the square*)

L'identité fondamentale est

$$x^2 + 2ux = (x + u)^2 - u^2.$$

Elle permet de transformer certains trinômes en forme canonique sans utiliser de formule générale.



Exemple type

Déterminer la forme canonique de $f(x) = x^2 - 6x + 4$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 4 \\ &= x^2 - 6x + 9 - 9 + 4 \\ &= (x - 3)^2 - 5. \end{aligned}$$

$$f(x) = (x - 3)^2 - 5$$



Un coefficient devant x^2

Déterminer la forme canonique de $g(x) = 2x^2 + 6x + 4$.

$$\begin{aligned} g(x) &= 2(x^2 + 3x + 2) \\ &= 2 \left[\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} + 2 \right] \\ &= 2 \left[\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \end{aligned}$$

$$g(x) = 2 \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}$$

II.4 Lecture graphique de la forme canonique

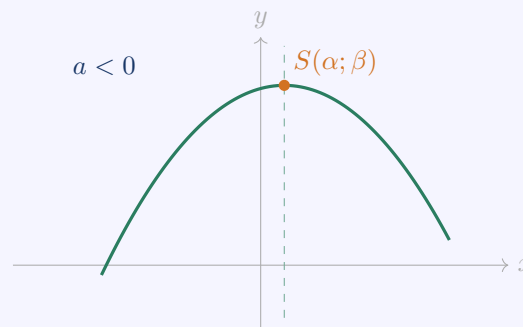
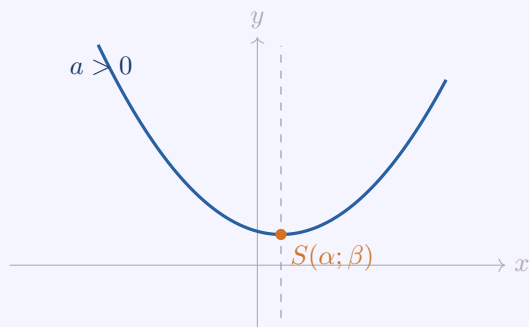
Propriété 2 (Sommet et axe de symétrie)

Si

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

alors la **courbe représentative** (*graph*) de f est une **parabole** (*parabola*) :

- son **sommet** (*vertex*) est $S(\alpha; \beta)$;
- son **axe de symétrie** (*axis of symmetry*) est la droite d'équation $x = \alpha$;
- si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut ;
- si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas.



On verra que :

$$\boxed{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta} \text{ et } \begin{cases} \alpha = \frac{-b}{2a} \\ \beta = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases}$$

III Équations du second degré

III.1 Racines et interprétation graphique

Définition 2 (Équation du second degré et racine)

Une **équation du second degré** (*quadratic equation*) est une équation qui peut s'écrire

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Une **racine** (*root*) du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est un réel x tel que $f(x) = 0$.

Propriété 3 (Interprétation graphique)

Les racines de f sont les **abscisses** (*x-coordinates*) des points d'intersection de la parabole $\mathcal{C}_f$ avec l'**axe des abscisses** (*x-axis*).

Ainsi, une fonction polynôme du second degré peut avoir zéro, une ou deux racines réelles.

III.2 Discriminant

Définition 3 (Discriminant)

Pour un trinôme

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

on appelle **discriminant** (*discriminant*) le réel

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

III.3 Résolution générale

Théorème 1 (Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$)

Soit $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a **aucune solution réelle** (*no real solution*).
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une **unique solution réelle** (*one real solution*), appelée **racine double** (*double root*) :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet **deux solutions réelles distinctes** (*two distinct real solutions*) :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$



ROC 1 : Résolution de l'équation du second degré

Comme $a \neq 0$, on complète le carré :

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}.
 \end{aligned}$$

On vient de montrer que la forme Canonique s'obtient avec :

$$\boxed{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{cases} \alpha = \frac{-b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases}}$$

Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ revient donc à résoudre

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

- Si $\Delta < 0$, le membre de droite est strictement négatif tandis qu'un carré est toujours positif ou nul. L'équation n'a donc aucune solution réelle.
- Si $\Delta = 0$,

$$\begin{aligned}
 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 &\iff x + \frac{b}{2a} = 0 \\
 &\iff \boxed{x = -\frac{b}{2a}}.
 \end{aligned}$$

- Si $\Delta > 0$,

$$\begin{aligned}
 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \\
 \iff \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) &= 0.
 \end{aligned}$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Ainsi

$$\boxed{x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{ou} \quad \boxed{x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}.$$

III.4 Exemples

Deux racines réelles

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases} \implies \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 > 0.$$

Donc l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{6} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -1; \frac{1}{3} \right\}.$$

Exercice 1 Résolution

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 3x - 10 = 0$.

C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -10 \end{cases} \implies \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49 > 0.$$

Donc l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{3 - 7}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 + 7}{2} = 5.$$

$$\mathcal{S} = \{-2; 5\}.$$

Exercice 2 Résolution

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$.

C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases} \implies \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0.$$

Donc l'équation admet 1 racine double :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1,$$

$$\mathcal{S} = \{-1\}.$$



Remarque

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x + 1)^2 = 0 \iff x = -1$$

IV Factoriser un trinôme : choisir une stratégie

IV.1 Ne pas commencer systématiquement par le discriminant



Stratégie de factorisation

Avant de calculer Δ , on cherche toujours la méthode la plus simple.

1. Peut-on mettre un **facteur commun** (*common factor*) en évidence ?
2. Reconnait-on une **identité remarquable** (*algebraic identity*) ?
3. Sinon, on utilise les formules générales issues du discriminant.

IV.2 Factorisations directes



Facteur commun et identités remarquables

1. $2x^2 - 8x = 2x(x - 4)$;
2. $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$;
3. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

IV.3 Forme factorisée à partir des racines

Propriété 4 (Factorisation d'un trinôme (*factoring a quadratic*))

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta > 0$ et si x_1, x_2 sont les deux racines, alors

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Si $\Delta = 0$ et si x_0 est la racine double, alors

$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$

- Si $\Delta < 0$, le trinôme ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$ en produit de facteurs du premier degré.

V Signe d'un trinôme du second degré

V.1 Commencer par la forme factorisée



Principe

Lorsqu'un trinôme est donné sous **forme factorisée** (*factored form*), on étudie le **signe** (*sign*) de chacun de ses facteurs puis celui du produit.



Étude de signe à partir d'une factorisation

Étudier le signe de

$$g(x) = -2(x - 1)(x - 5).$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
-2	—	—	—		
$x - 1$	—	0	+	+	
$x - 5$	—	—	0	+	
$g(x)$	—	0	+	0	—

V.2 Règle générale

Théorème 2 (Signe d'un trinôme (*sign of a quadratic*))

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta < 0$, f est du **signe de a** sur $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, f est du **signe de a** sur $\mathbb{R}$ et s'annule uniquement en $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, en notant $x_1 < x_2$ les deux racines, f est du **signe de a à l'extérieur** de $[x_1, x_2]$ et du **signe opposé à a entre les racines**.

Le **tableau de signe** (*sign chart*) correspondant au cas $\Delta > 0$ est :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a



Moyen mnémotechnique

Lorsque $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a à **l'extérieur des racines**. On peut retenir : « signe de a dehors, signe contraire dedans ».

VI Variations et représentation graphique

VI.1 Variations à partir de la forme canonique

Propriété 5 (Variations *(increasing/decreasing behavior)*)

Soit

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \quad a \neq 0 \quad \begin{cases} \alpha = \frac{-b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases}.$$

- Si $a > 0$, f est **décroissante** (*decreasing*) sur $] -\infty; \alpha]$ puis **croissante** (*increasing*) sur $[\alpha; +\infty[$. Elle atteint son **minimum** (*minimum*) β en $x = \alpha$.
- Si $a < 0$, f est **croissante** (*increasing*) sur $] -\infty; \alpha]$ puis **décroissante** (*decreasing*) sur $[\alpha; +\infty[$. Elle atteint son **maximum** (*maximum*) β en $x = \alpha$.

$a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$+\infty$	β	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$-\infty$	β	$-\infty$

VI.2 Repères utiles dans le cas général

Propriété 6 (Axe et sommet *(axis and vertex)*)

Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, l'axe de symétrie de la parabole a pour équation

$$x = \alpha = -\frac{b}{2a}.$$

Le **sommet** (*vertex*) est

$$S(\alpha; f(\alpha)).$$

Ainsi, si l'on note $\beta = f(\alpha)$ on a la forme canonique est :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \quad a \neq 0 \quad \begin{cases} \alpha = \frac{-b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases}.$$



Lire les variations

Déterminer les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 13.$$

La fonction f est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec : $\begin{cases} a = 2 \\ b = -12 \\ c = 13 \end{cases}$.

D'après le cours on sait que la forme canonique est

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \quad \begin{cases} a = 2 \\ \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{4} = 3 \\ \beta = f(\alpha) = 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 13 = -5 \end{cases}.$$

Soit

$$f(x) = 2(x - 3)^2 - 5$$

Donc puisque $a = 2 > 0$, la fonction f est **décroissante** (*decreasing*) sur $] -\infty; 3]$, puis **croissante** (*increasing*) sur $[3; +\infty[$.

Elle admet un minimum égal à -5 , atteint pour $x = 3$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f			

VII Prolongement : somme et produit des racines

Propriété 7 (Somme et produit des racines (*sum and product of the roots*))

Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines réelles x_1 et x_2 (éventuellement confondues), alors

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_1 x_2 = \frac{c}{a}}.$$



Preuve

Comme x_1 et x_2 sont les deux racines,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2. \end{aligned}$$

Par identification avec $ax^2 + bx + c$, on obtient

$$-a(x_1 + x_2) = b, \quad ax_1 x_2 = c,$$

d'où

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$



Racine évidente (*obvious root*)

Résoudre $17x^2 - x - 16 = 0$ sans commencer par calculer le discriminant.

On remarque que $x_1 = 1$ est une racine car

$$17 \times 1^2 - 1 - 16 = 0.$$

La somme des racines vaut

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{1}{17}.$$

Ainsi

$$1 + x_2 = \frac{1}{17}$$

$$\boxed{x_2 = -\frac{16}{17}}.$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ 1; -\frac{16}{17} \right\}}.$$



Détection mentale

Factoriser $3x^2 - 5x + 2$.

On cherche deux racines dont

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{2}{3}.$$

Les nombres 1 et $\frac{2}{3}$ conviennent. Ainsi

$$3x^2 - 5x + 2 = 3(x - 1) \left(x - \frac{2}{3} \right) = (3x - 2)(x - 1).$$



Approfondissement possible : retrouver deux nombres à partir de S et P

Deux réels x_1 et x_2 ont pour somme S et pour produit P si et seulement s'ils sont racines du trinôme

$$x^2 - Sx + P.$$

Par exemple, chercher deux nombres dont la somme vaut 1 et le produit vaut -6 revient à chercher les racines de

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

Les deux nombres sont donc 3 et -2 .

VIII Bilan

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ avec } a \neq 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

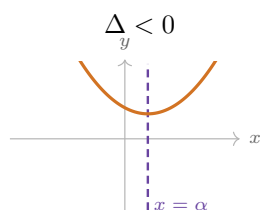
$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \alpha = \frac{-b}{2a} ; \beta = f(\alpha) = \frac{-\Delta}{4a}$$

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Nombre de racines (roots)	aucune	une racine double	deux racines distinctes
Racines	—	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation sur $\mathbb{R}$	pas de factorisation en facteurs du premier degré	$f(x) = a(x - x_0)^2$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
Signe (sign)	signe de a sur $\mathbb{R}$	signe de a sur $\mathbb{R}$, avec $f(x_0) = 0$	signe de a à l'extérieur des racines, signe opposé entre x_1 et x_2

Dans chaque graphique, la droite verticale en pointillés est l'axe de symétrie $x = \alpha$.

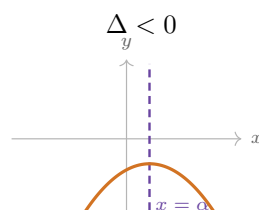
Cas où $a > 0$: parabole tournée vers le haut

Cas où $a < 0$: parabole tournée vers le bas



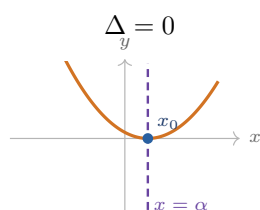
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

Aucune racine : $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.



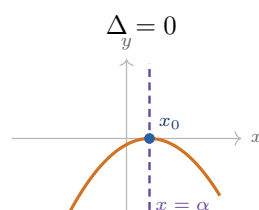
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-	

Aucune racine : $f(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.



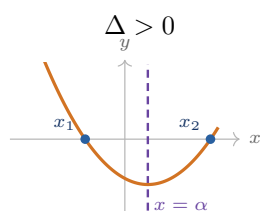
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

Une racine double x_0 .



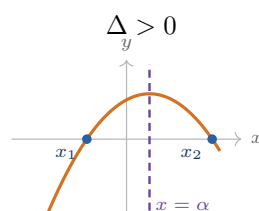
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

Une racine double x_0 .



x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	+

Deux racines $x_1 < x_2$.



x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	-

Deux racines $x_1 < x_2$.

Choisir la bonne forme

- $ax^2 + bx + c$: coefficients, Δ ;
- $a(x - \alpha)^2 + \beta$: sommet, extremum, variations ;
- $a(x - x_1)(x - x_2)$: racines, signe, inéquations.

Signe du trinôme

- $\Delta < 0$: signe de a partout ;
- $\Delta = 0$: signe de a , sauf en x_0 où $f(x_0) = 0$;
- $\Delta > 0$: signe de a à l'extérieur des racines, signe opposé entre elles.

Variations

Forme Canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases}$$

- $a > 0$: décroissante puis croissante, minimum β en α ;
- $a < 0$: croissante puis décroissante, maximum β en α .

Prolongement : somme et produit des racines.

Si x_1 et x_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c$, alors $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Réciproquement, deux réels de somme S et de produit P sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$.

↔ Fin du cours ↔