

## TD – EXERCICES

## TD 2

## Suites : généralités

Version corrigée – Version imprimable

## Sommaire du TD

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| I Définir et calculer les termes d'une suite                    | 2  |
| II Représentation graphique d'une suite                         | 21 |
| III Variations des suites définies par une formule              | 23 |
| IV Variations des suites définies par récurrence                | 32 |
| V Variations des suites : le Bilan                              | 36 |
| VI Python : calculer des termes, une liste et un seuil          | 41 |
| VII Première intuition de la notion de limite                   | 51 |
| VIII Problèmes de synthèse : modélisation, variations et seuils | 53 |
| IX Bilan - Pour Préparer le Test                                | 59 |
| X Automatismes du chapitre – Pour préparer le test              | 67 |
| XI Extraits du Bac 2026                                         | 70 |
| XII Now We Can Talk : pour aller plus loin                      | 73 |
| XIII Représentation en escalier d'une suite récurrente          | 82 |

## Objectifs

- Passer d'une liste Python à la notation d'une suite et calculer des termes.
- Reconnaître les modes de génération : explicite, récurrence, algorithme, motif.
- Représenter graphiquement les termes d'une suite.
- Étudier le sens de variation à l'aide de  $u_{n+1} - u_n$ .
- Écrire ou compléter un programme Python pour calculer des termes ou chercher un seuil.
- Conjecturer, sur des exemples simples, le comportement d'une suite pour de grandes valeurs de  $n$ .

## Thème I

## Définir et calculer les termes d'une suite



## Méthode 1 : terme général

Une formule explicite donne  $u_n$  directement en fonction de  $n$ . Pour calculer  $u_4$ , remplacer  $n$  par 4 dans toute la formule : on n'a pas besoin de connaître les termes précédents.

## Exercice 1 Premiers termes de suites explicites

Pour chacune des suites suivantes définies pour tout entier naturel  $n$ , calculer les cinq premiers termes.

1.  $u_n = 7n + 1$

2.  $v_n = n^2 - 3n + 1$

3.  $w_n = \frac{1}{2n-1}$

4.  $t_n = \sqrt{5n+1}$



## Corrigé

1. Pour  $u_n = 7n + 1$ , on remplace  $n$  successivement par 0, 1, 2, 3 et 4 :

$$\begin{aligned} u_0 &= 7 \times 0 + 1 \\ &= 0 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_0 = 1}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 7 \times 1 + 1 \\ &= 7 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 8}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= 7 \times 2 + 1 \\ &= 14 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = 15}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= 7 \times 3 + 1 \\ &= 21 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_3 = 22}$$

$$\begin{aligned} u_4 &= 7 \times 4 + 1 \\ &= 28 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_4 = 29}$$



## Corrigé

2. Pour  $v_n = n^2 - 3n + 1$ , on remplace  $n$  dans toute la formule et on calcule d'abord la puissance :

$$\begin{aligned}v_0 &= 0^2 - 3 \times 0 + 1 \\&= 0 - 0 + 1\end{aligned}$$

$$\boxed{v_0 = 1}$$

$$\begin{aligned}v_1 &= 1^2 - 3 \times 1 + 1 \\&= 1 - 3 + 1\end{aligned}$$

$$\boxed{v_1 = -1}$$

$$\begin{aligned}v_2 &= 2^2 - 3 \times 2 + 1 \\&= 4 - 6 + 1 \\&= -2 + 1\end{aligned}$$

$$\boxed{v_2 = -1}$$

$$\begin{aligned}v_3 &= 3^2 - 3 \times 3 + 1 \\&= 9 - 9 + 1\end{aligned}$$

$$\boxed{v_3 = 1}$$

$$\begin{aligned}v_4 &= 4^2 - 3 \times 4 + 1 \\&= 16 - 12 + 1 \\&= 4 + 1\end{aligned}$$

$$\boxed{v_4 = 5}$$



## Corrigé

3. Pour  $w_n = \frac{1}{2n-1}$  :

$$\begin{aligned}w_0 &= \frac{1}{2 \times 0 - 1} \\&= \frac{1}{-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{w_0 = -1}$$

$$\begin{aligned}w_1 &= \frac{1}{2 \times 1 - 1} \\&= \frac{1}{1}\end{aligned}$$

$$\boxed{w_1 = 1}$$

$$\begin{aligned}w_2 &= \frac{1}{2 \times 2 - 1} \\&= \frac{1}{4 - 1}\end{aligned}$$

$$\boxed{w_2 = \frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned}w_3 &= \frac{1}{2 \times 3 - 1} \\&= \frac{1}{6 - 1}\end{aligned}$$

$$\boxed{w_3 = \frac{1}{5}}$$

$$\begin{aligned}w_4 &= \frac{1}{2 \times 4 - 1} \\&= \frac{1}{8 - 1}\end{aligned}$$

$$\boxed{w_4 = \frac{1}{7}}$$



## Corrigé

4. Pour  $t_n = \sqrt{5n+1}$  :

$$t_0 = \sqrt{5 \times 0 + 1}$$

$$= \sqrt{1}$$

$$\boxed{t_0 = 1}$$

$$t_1 = \sqrt{5 \times 1 + 1}$$

$$= \sqrt{5 + 1}$$

$$\boxed{t_1 = \sqrt{6}}$$

$$t_2 = \sqrt{5 \times 2 + 1}$$

$$= \sqrt{10 + 1}$$

$$\boxed{t_2 = \sqrt{11}}$$

$$t_3 = \sqrt{5 \times 3 + 1}$$

$$= \sqrt{15 + 1}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$\boxed{t_3 = 4}$$

$$t_4 = \sqrt{5 \times 4 + 1}$$

$$= \sqrt{20 + 1}$$

$$\boxed{t_4 = \sqrt{21}}$$



### Méthode 2 : récurrence

Une relation de récurrence donne  $u_{n+1}$  à partir de  $u_n$ . Commencer par le terme initial, puis calculer les suivants dans l'ordre. Vérifier si la suite commence à  $u_0$  ou à  $u_1$ .

## Exercice 2 Calculer les premiers termes d'une suite récurrente

Soit  $u_n$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 5u_n - 3$ .

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
2. Comment calculer  $u_{50}$ .



### Corrigé

1. La suite commence au rang 0. On utilise chaque terme pour calculer le suivant :

$$u_1 = 5u_0 - 3$$

$$= 5 \times 2 - 3$$

$$= 10 - 3$$

$$\boxed{u_1 = 7}$$

$$u_2 = 5u_1 - 3$$

$$= 5 \times 7 - 3$$

$$= 35 - 3$$

$$\boxed{u_2 = 32}$$

$$u_3 = 5u_2 - 3$$

$$= 5 \times 32 - 3$$

$$= 160 - 3$$

$$\boxed{u_3 = 157}$$



### Corrigé

2. La relation  $u_{n+1} = 5u_n - 3$  ne donne pas directement  $u_{50}$  en fonction de 50. Il faut partir de  $u_0 = 2$ , puis calculer successivement  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , ..., jusqu'à  $u_{50}$ . Pour autant de calculs, on utilise de préférence la calculatrice ou une boucle Python.

### Exercice 3 Premiers termes de suites définies par récurrence

Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence pour tout entier naturel  $n$ , calculer les quatre termes suivant le premier.

1.  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$       2.  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$       3.  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 2} \end{cases}$       4.  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}$



#### Corrigé

1.  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 2u_n + 1$ .

$$\begin{aligned} u_1 &= 2u_0 + 1 \\ &= 2 \times 2 + 1 \\ &= 4 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 5}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= 2u_1 + 1 \\ &= 2 \times 5 + 1 \\ &= 10 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = 11}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= 2u_2 + 1 \\ &= 2 \times 11 + 1 \\ &= 22 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_3 = 23}$$

$$\begin{aligned} u_4 &= 2u_3 + 1 \\ &= 2 \times 23 + 1 \\ &= 46 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_4 = 47}$$



#### Corrigé

2.  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ . On calcule bien le carré du terme précédent avant d'ajouter 1.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0^2 + 1 \\ &= 1^2 + 1 \\ &= 1 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 2}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1^2 + 1 \\ &= 2^2 + 1 \\ &= 4 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = 5}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= u_2^2 + 1 \\ &= 5^2 + 1 \\ &= 25 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_3 = 26}$$

$$\begin{aligned} u_4 &= u_3^2 + 1 \\ &= 26^2 + 1 \\ &= 676 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_4 = 677}$$



#### Corrigé

3. Ici, la suite commence au rang 1 :  $u_1 = 1$ .

$$u_2 = \frac{1}{u_1 + 2}$$

$$= \frac{1}{1 + 2}$$

$$\boxed{u_2 = \frac{1}{3}}$$

$$u_3 = \frac{1}{u_2 + 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3} + 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{6}{3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{7}{3}}$$

$$= 1 \times \frac{3}{7}$$

$$\boxed{u_3 = \frac{3}{7}}$$

$$u_4 = \frac{1}{u_3 + 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{7} + 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{7} + \frac{14}{7}}$$

$$= \frac{1}{\frac{17}{7}}$$

$$= 1 \times \frac{7}{17}$$

$$\boxed{u_4 = \frac{7}{17}}$$

$$u_5 = \frac{1}{u_4 + 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{7}{17} + 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{7}{17} + \frac{34}{17}}$$

$$= \frac{1}{\frac{41}{17}}$$

$$= 1 \times \frac{17}{41}$$

$$\boxed{u_5 = \frac{17}{41}}$$



### Corrigé

4.  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$ .

$$u_1 = \sqrt{u_0^2 + 1}$$

$$= \sqrt{1^2 + 1}$$

$$= \sqrt{1 + 1}$$

$$\boxed{u_1 = \sqrt{2}}$$

$$u_2 = \sqrt{u_1^2 + 1}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1}$$

$$= \sqrt{2 + 1}$$

$$\boxed{u_2 = \sqrt{3}}$$

$$u_3 = \sqrt{u_2^2 + 1}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1}$$

$$= \sqrt{3 + 1}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$\boxed{u_3 = 2}$$

$$u_4 = \sqrt{u_3^2 + 1}$$

$$= \sqrt{2^2 + 1}$$

$$= \sqrt{4 + 1}$$

$$\boxed{u_4 = \sqrt{5}}$$

### Exercice 4 Modéliser une situation par une suite

Modéliser chaque situation par une suite en précisant son premier terme  $u_0$  et une relation de récurrence.

1. On débute avec 5. On construit une suite de nombres telle que chaque terme est égal à la somme de 5 et de l'inverse

du terme précédent.

**Corrigé**

On note  $u_n$  le nombre obtenu après  $n$  étapes. Le nombre initial est 5, donc

$$u_0 = 5$$

À chaque étape, on ajoute 5 à l'inverse du terme précédent. Ainsi, pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} = 5 + \frac{1}{u_n}$$

Comme  $u_0 = 5 > 0$  et que  $5 + \frac{1}{u_n} > 0$  dès que  $u_n > 0$ , les termes restent strictement positifs ; l'inverse de  $u_n$  est donc bien défini à chaque étape.

2. Un salaire initial est de 1 500 euros. Chaque année, il augmente de 0,1%.

**Corrigé**

On note  $u_n$  le salaire, en euros, après  $n$  années. Le salaire initial vaut 1 500 euros :

$$u_0 = 1\,500$$

Une augmentation de 0,1 % revient à conserver le salaire puis à ajouter 0,1 % de ce salaire :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{0,1}{100} u_n \\ &= u_n + 0,001 u_n \\ &= (1 + 0,001) u_n \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = 1,001 u_n$$

Cette relation est valable pour tout entier naturel  $n \geq 0$ .

3. La population initiale d'une ville est de 10 000 habitants. Chaque année, 80% des habitants restent et 500 nouvelles personnes arrivent.

**Corrigé**

On note  $u_n$  la population de la ville après  $n$  années. Au départ, la ville compte 10 000 habitants :

$$u_0 = 10\,000$$

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , 80 % des  $u_n$  habitants restent, soit  $0,8u_n$  habitants, puis 500 nouvelles personnes arrivent. Ainsi :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 500$$

**Méthode 3 : récurrence mixte**

Si  $u_{n+1}$  dépend de  $u_n$  et de  $n$ , utiliser à chaque étape le terme précédent et la valeur du rang  $n$ . Ainsi, pour trouver  $u_1$ , prendre  $n = 0$  et le terme  $u_0$  ; pour trouver  $u_2$ , prendre  $n = 1$  et le terme  $u_1$ . Si la relation utilise  $u_n$  et  $u_{n+1}$  pour calculer  $u_{n+2}$ , il faut deux termes initiaux.

**Exercice 5 Récurrences d'ordre un ou deux**

Pour chacune des suites définies pour tout entier naturel  $n$ , calculer les trois termes suivant le premier.

$$1. \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4n \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{2n+1} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + n \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 2 \end{cases}$$

**Corrigé**

1. Pour calculer  $u_1$ , on utilise  $n = 0$  ; pour  $u_2$ , on utilise  $n = 1$  ; pour  $u_3$ , on utilise  $n = 2$ .

$$\begin{aligned} u_1 &= 3u_0 - 4 \times 0 \\ &= 3 \times 2 - 4 \times 0 \\ &= 6 - 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 6}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= 3u_1 - 4 \times 1 \\ &= 3 \times 6 - 4 \times 1 \\ &= 18 - 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = 14}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= 3u_2 - 4 \times 2 \\ &= 3 \times 14 - 4 \times 2 \\ &= 42 - 8 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_3 = 34}$$

**Corrigé**

2. On remplace à la fois  $u_n$  par le terme précédent et  $n$  par le rang utilisé.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0^2 + \frac{1}{2 \times 0 + 1} \\ &= 0^2 + \frac{1}{1} \\ &= 0 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 1}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1^2 + \frac{1}{2 \times 1 + 1} \\ &= 1^2 + \frac{1}{3} \\ &= 1 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = \frac{4}{3}}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= u_2^2 + \frac{1}{2 \times 2 + 1} \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{5} \\ &= \frac{4^2}{3^2} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{16}{9} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{16 \times 5}{9 \times 5} + \frac{1 \times 9}{5 \times 9} \\ &= \frac{80}{45} + \frac{9}{45} \end{aligned}$$

$$\boxed{u_3 = \frac{89}{45}}$$



## Corrigé

3.  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = 5u_n - 2$ .

$$\begin{aligned} u_1 &= 5u_0 - 2 \\ &= 5 \times 3 - 2 \\ &= 15 - 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 13}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= 5u_1 - 2 \\ &= 5 \times 13 - 2 \\ &= 65 - 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = 63}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= 5u_2 - 2 \\ &= 5 \times 63 - 2 \\ &= 315 - 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_3 = 313}$$



## Corrigé

4. La relation utilise les deux termes précédents. Pour calculer  $u_2$ , on prend  $n = 0$  ; pour  $u_3$ , on prend  $n = 1$  ; pour  $u_4$ , on prend  $n = 2$ .

$$\begin{aligned} u_2 &= 2u_1 + u_0 \\ &= 2 \times 2 + 1 \\ &= 4 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = 5}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= 2u_2 + u_1 \\ &= 2 \times 5 + 2 \\ &= 10 + 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_3 = 12}$$

$$\begin{aligned} u_4 &= 2u_3 + u_2 \\ &= 2 \times 12 + 5 \\ &= 24 + 5 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_4 = 29}$$



### Corrigé

5. La relation dépend du terme précédent et du rang  $n$ .

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + 0 \\ &= 2 + 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = 2}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= u_2 + 1 \\ &= 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_3 = 3}$$

$$\begin{aligned} u_4 &= u_3 + 2 \\ &= 3 + 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_4 = 5}$$

## Exercice 6 Calculer des termes à la calculatrice

Utiliser la calculatrice afin de faire afficher de la quatrième à la dixième valeur des deux suites suivantes définies sur  $\mathbb{N}$ .

1. 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = nu_n + 5 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - (n+2) \end{cases}$$



### Corrigé

Dans les deux suites, le premier terme est  $u_0$  : la quatrième valeur est donc  $u_3$  et la dixième valeur est  $u_9$ .

1. Pour  $u_{n+1} = nu_n + 5$  :

$$\begin{aligned}u_1 &= 0 \times u_0 + 5 \\&= 0 \times 2 + 5\end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 5}$$

$$\begin{aligned}u_2 &= 1 \times u_1 + 5 \\&= 1 \times 5 + 5 \\&= 5 + 5\end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = 10}$$

$$\begin{aligned}u_3 &= 2 \times u_2 + 5 \\&= 2 \times 10 + 5 \\&= 20 + 5\end{aligned}$$

$$\boxed{u_3 = 25}$$

$$\begin{aligned}u_4 &= 3 \times u_3 + 5 \\&= 3 \times 25 + 5 \\&= 75 + 5\end{aligned}$$

$$\boxed{u_4 = 80}$$

$$\begin{aligned}u_5 &= 4 \times u_4 + 5 \\&= 4 \times 80 + 5 \\&= 320 + 5\end{aligned}$$

$$\boxed{u_5 = 325}$$

$$\begin{aligned}u_6 &= 5 \times u_5 + 5 \\&= 5 \times 325 + 5 \\&= 1\,625 + 5\end{aligned}$$

$$\boxed{u_6 = 1\,630}$$

$$\begin{aligned}u_7 &= 6 \times u_6 + 5 \\&= 6 \times 1\,630 + 5 \\&= 9\,780 + 5\end{aligned}$$

$$\boxed{u_7 = 9\,785}$$

$$\begin{aligned}u_8 &= 7 \times u_7 + 5 \\&= 7 \times 9\,785 + 5 \\&= 68\,495 + 5\end{aligned}$$

$$\boxed{u_8 = 68\,500}$$

$$\begin{aligned}u_9 &= 8 \times u_8 + 5 \\&= 8 \times 68\,500 + 5 \\&= 548\,000 + 5\end{aligned}$$

$$\boxed{u_9 = 548\,005}$$

**Corrigé**

2. Pour  $u_{n+1} = u_n^2 - (n+2)$ , on calcule d'abord le carré du terme précédent, puis on effectue la soustraction :

$$\begin{aligned}u_1 &= (-1)^2 - (0 + 2) \\ &= 1 - 2\end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = -1}$$

$$\begin{aligned}u_2 &= (-1)^2 - (1 + 2) \\ &= 1 - 3\end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = -2}$$

$$\begin{aligned}u_3 &= (-2)^2 - (2 + 2) \\ &= 4 - 4\end{aligned}$$

$$\boxed{u_3 = 0}$$

$$\begin{aligned}u_4 &= 0^2 - (3 + 2) \\ &= 0 - 5\end{aligned}$$

$$\boxed{u_4 = -5}$$

$$\begin{aligned}u_5 &= (-5)^2 - (4 + 2) \\ &= 25 - 6\end{aligned}$$

$$\boxed{u_5 = 19}$$

$$\begin{aligned}u_6 &= 19^2 - (5 + 2) \\ &= 361 - 7\end{aligned}$$

$$\boxed{u_6 = 354}$$

$$\begin{aligned}u_7 &= 354^2 - (6 + 2) \\ &= 125\,316 - 8\end{aligned}$$

$$\boxed{u_7 = 125\,308}$$

$$\begin{aligned}u_8 &= 125\,308^2 - (7 + 2) \\ &= 15\,702\,094\,864 - 9\end{aligned}$$

$$\boxed{u_8 = 15\,702\,094\,855}$$

$$\begin{aligned}u_9 &= 15\,702\,094\,855^2 - (8 + 2) \\ &= 246\,555\,782\,835\,417\,471\,025 - 10\end{aligned}$$

$$\boxed{u_9 = 246\,555\,782\,835\,417\,471\,015}$$

### Exercice 7 Deux suites couplées

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  par :

$$1. \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}$$

Calculer  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $u_2$  et  $v_2$ .



#### Corrigé

Pour calculer les termes de rang 1, on utilise uniquement  $u_0 = 1$  et  $v_0 = 2$ .

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{3u_0 + 2v_0}{5} \\ &= \frac{3 \times 1 + 2 \times 2}{5} \\ &= \frac{3 + 4}{5} \\ \boxed{u_1} &= \frac{7}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{2u_0 + 3v_0}{5} \\ &= \frac{2 \times 1 + 3 \times 2}{5} \\ &= \frac{2 + 6}{5} \\ \boxed{v_1} &= \frac{8}{5}\end{aligned}$$

Pour calculer les termes de rang 2, on utilise maintenant  $u_1 = \frac{7}{5}$  et  $v_1 = \frac{8}{5}$ .

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \frac{3u_1 + 2v_1}{5} \\
 &= \frac{3 \times \frac{7}{5} + 2 \times \frac{8}{5}}{5} \\
 &= \frac{\frac{21}{5} + \frac{16}{5}}{5} \\
 &= \frac{\frac{37}{5}}{5} \\
 &= \frac{37}{5} \times \frac{1}{5} \\
 \boxed{u_2} &= \frac{37}{25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_2 &= \frac{2u_1 + 3v_1}{5} \\
 &= \frac{2 \times \frac{7}{5} + 3 \times \frac{8}{5}}{5} \\
 &= \frac{\frac{14}{5} + \frac{24}{5}}{5} \\
 &= \frac{\frac{38}{5}}{5} \\
 &= \frac{38}{5} \times \frac{1}{5} \\
 \boxed{v_2} &= \frac{38}{25}
 \end{aligned}$$

### Exercice 8 Passer d'une forme explicite à une récurrence

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = 2^n - 3$ .

1. Calculer  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_3$  et  $u_5$ .

2.

2. a. Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$ .

2. b. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + 3$ .

2. c. En déduire une définition de la suite  $(u_n)$  à l'aide d'une relation de récurrence.



#### Corrigé

1. On remplace  $n$  par le rang demandé et on calcule la puissance avant de soustraire 3.

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 2^0 - 3 \\
 &= 1 - 3 \\
 \boxed{u_0} &= -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 2^1 - 3 \\
 &= 2 - 3 \\
 \boxed{u_1} &= -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_3 &= 2^3 - 3 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 - 3 \\
 &= 8 - 3 \\
 \boxed{u_3} &= 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_5 &= 2^5 - 3 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 3 \\
 &= 32 - 3 \\
 \boxed{u_5} &= 29
 \end{aligned}$$



#### Corrigé

2.a. Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on remplace  $n$  par  $n + 1$  dans toute la formule :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= 2^{n+1} - 3 \\
 &= 2^n \times 2 - 3
 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} = 2 \times 2^n - 3}$$

**Corrigé**

2.b. Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on part de  $u_n = 2^n - 3$  et on ajoute 3 aux deux membres :

$$\begin{aligned} u_n + 3 &= 2^n - 3 + 3 \\ &= 2^n \end{aligned}$$

$$\boxed{2^n = u_n + 3}$$

On remplace donc  $2^n$  par  $u_n + 3$  dans l'expression obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 \times 2^n - 3 \\ &= 2(u_n + 3) - 3 \\ &= 2u_n + 6 - 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} = 2u_n + 3}$$

**Corrigé**

2.c. Le terme initial est  $u_0 = -2$  et, pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + 3$ . Ainsi :

$$\begin{cases} u_0 = -2, \\ u_{n+1} = 2u_n + 3. \end{cases}$$

**Exercice 9 Exprimer les termes voisins**

Pour chacune des suites suivantes définies sur  $\mathbb{N}$ , exprimer  $u_{n-1}$  et  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$ , pour  $n \geq 1$  :

1.  $u_n = 6n + 8$

4.  $u_n = 5^n$

6.  $u_n = \frac{9n-5}{4n+6}$

2.  $u_n = n^2 - 2n + 8$

3.  $u_n = \frac{n(n+1)}{n+2}$

5.  $u_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$

7.  $u_n = \left(\frac{n^2}{n+1}\right)^{n+1}$

**Corrigé**

1. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on remplace  $n$  par  $n-1$ , puis par  $n+1$  :

$$\begin{aligned} u_{n-1} &= 6(n-1) + 8 \\ &= 6n - 6 + 8 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n-1} = 6n + 2}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 6(n+1) + 8 \\ &= 6n + 6 + 8 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} = 6n + 14}$$

**Corrigé**

2. On développe soigneusement les carrés  $(n-1)^2$  et  $(n+1)^2$  :

$$\begin{aligned} u_{n-1} &= (n-1)^2 - 2(n-1) + 8 \\ &= (n^2 - 2n + 1) - 2n + 2 + 8 \\ &= n^2 - 2n + 1 - 2n + 2 + 8 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n-1} = n^2 - 4n + 11}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 - 2(n+1) + 8 \\ &= (n^2 + 2n + 1) - 2n - 2 + 8 \\ &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 8 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} = n^2 + 7}$$

**Corrigé**

3. Le rang  $n$  apparaît plusieurs fois dans la fraction : on le remplace partout.

$$\begin{aligned} u_{n-1} &= \frac{(n-1)((n-1)+1)}{(n-1)+2} \\ &= \frac{(n-1)n}{n+1} \\ \boxed{u_{n-1} &= \frac{n(n-1)}{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{(n+1)+2} \\ \boxed{u_{n+1} &= \frac{(n+1)(n+2)}{n+3}} \end{aligned}$$

**Corrigé**

4. Ici,  $n$  apparaît uniquement dans l'exposant. On remplace donc l'exposant  $n$  par  $n-1$  puis par  $n+1$  :

$$\boxed{u_{n-1} = 5^{n-1}}$$

$$\boxed{u_{n+1} = 5^{n+1}}$$

**Corrigé**

5. Attention : dans le numérateur, l'exposant est déjà  $n+1$ .

$$\begin{aligned} u_{n-1} &= \frac{3^{(n-1)+1}}{2^{n-1}} \\ \boxed{u_{n-1} &= \frac{3^n}{2^{n-1}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{3^{(n+1)+1}}{2^{n+1}} \\ \boxed{u_{n+1} &= \frac{3^{n+2}}{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

**Corrigé**

6. On remplace  $n$  dans le numérateur et dans le dénominateur :

$$\begin{aligned} u_{n-1} &= \frac{9(n-1)-5}{4(n-1)+6} \\ &= \frac{9n-9-5}{4n-4+6} \\ \boxed{u_{n-1} &= \frac{9n-14}{4n+2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{9(n+1)-5}{4(n+1)+6} \\ &= \frac{9n+9-5}{4n+4+6} \\ \boxed{u_{n+1} &= \frac{9n+4}{4n+10}} \end{aligned}$$

**Corrigé**

7. Le rang  $n$  apparaît au numérateur, au dénominateur et dans l'exposant : les trois occurrences doivent être remplacées.

$$u_{n-1} = \left( \frac{(n-1)^2}{(n-1)+1} \right)^{(n-1)+1}$$

$$u_{n-1} = \left( \frac{(n-1)^2}{n} \right)^n$$

$$u_{n+1} = \left( \frac{(n+1)^2}{(n+1)+1} \right)^{(n+1)+1}$$

$$u_{n+1} = \left( \frac{(n+1)^2}{n+2} \right)^{n+2}$$

**Exercice 10** **[!]** **Bilan** Trois façons de définir une suite

1. Pour  $u_n = 7n + 1$ , calculer  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

**Corrigé**

La suite  $(u_n)$  est définie explicitement. On remplace  $n$  par le rang demandé :

$$\begin{aligned} u_0 &= 7 \times 0 + 1 \\ &= 0 + 1 \end{aligned}$$

$$u_0 = 1$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 7 \times 1 + 1 \\ &= 7 + 1 \end{aligned}$$

$$u_1 = 8$$

$$\begin{aligned} u_2 &= 7 \times 2 + 1 \\ &= 14 + 1 \end{aligned}$$

$$u_2 = 15$$

$$\begin{aligned} u_3 &= 7 \times 3 + 1 \\ &= 21 + 1 \end{aligned}$$

$$u_3 = 22$$

2. Pour la suite définie par

$$v_0 = 2, \quad v_{n+1} = 2v_n + 1,$$

calculer  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ .

**Corrigé**

La suite  $(v_n)$  est définie par récurrence : chaque terme se calcule à partir du précédent.

$$\begin{aligned} v_1 &= 2v_0 + 1 \\ &= 2 \times 2 + 1 \\ &= 4 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{v_1 = 5}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= 2v_1 + 1 \\ &= 2 \times 5 + 1 \\ &= 10 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{v_2 = 11}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= 2v_2 + 1 \\ &= 2 \times 11 + 1 \\ &= 22 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{v_3 = 23}$$

3. Pour la suite définie par

$$w_0 = 3, \quad w_{n+1} = w_n + 2n + 1,$$

calculer  $w_1$ ,  $w_2$  et  $w_3$ .



**Corrigé**

La relation dépend à la fois du terme précédent et du rang  $n$ . Pour calculer  $w_1$ , on utilise  $w_0$  et  $n = 0$ ; pour  $w_2$ , on utilise  $w_1$  et  $n = 1$ , etc.

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 + 2 \times 0 + 1 \\ &= 3 + 0 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{w_1 = 4}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1 + 2 \times 1 + 1 \\ &= 4 + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{w_2 = 7}$$

$$\begin{aligned} w_3 &= w_2 + 2 \times 2 + 1 \\ &= 7 + 4 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{w_3 = 12}$$

4. Préciser le mode de définition de chacune des trois suites.



**Corrigé**

La suite  $(u_n)$  est définie par son terme général, car  $u_n$  est donné directement en fonction de  $n$ .

La suite  $(v_n)$  est définie par récurrence, car  $v_{n+1}$  est calculé à partir de  $v_n$ .

La suite  $(w_n)$  est définie par une récurrence mixte, car  $w_{n+1}$  dépend à la fois du terme précédent  $w_n$  et du rang  $n$ .

#### Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 11, page 17.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

#### Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 12, page 19.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

### Exercice 11 **[+]** Consolidation Même travail, autres valeurs

1. Pour  $a_n = n^2 - 2n + 3$ , calculer  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ .

**Corrigé**

La suite  $(a_n)$  est définie explicitement. On calcule d'abord le carré, puis le produit  $2n$ .

$$a_0 = 0^2 - 2 \times 0 + 3$$

$$= 0 - 0 + 3$$

$$\boxed{a_0 = 3}$$

$$a_1 = 1^2 - 2 \times 1 + 3$$

$$= 1 - 2 + 3$$

$$= -1 + 3$$

$$\boxed{a_1 = 2}$$

$$a_2 = 2^2 - 2 \times 2 + 3$$

$$= 4 - 4 + 3$$

$$\boxed{a_2 = 3}$$

$$a_3 = 3^2 - 2 \times 3 + 3$$

$$= 9 - 6 + 3$$

$$= 3 + 3$$

$$\boxed{a_3 = 6}$$

2. Pour

$$b_0 = 2, \quad b_{n+1} = 3b_n - 2,$$

calculer  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$ .

**Corrigé**

On utilise successivement le terme précédent :

$$b_1 = 3b_0 - 2$$

$$= 3 \times 2 - 2$$

$$= 6 - 2$$

$$\boxed{b_1 = 4}$$

$$b_2 = 3b_1 - 2$$

$$= 3 \times 4 - 2$$

$$= 12 - 2$$

$$\boxed{b_2 = 10}$$

$$b_3 = 3b_2 - 2$$

$$= 3 \times 10 - 2$$

$$= 30 - 2$$

$$\boxed{b_3 = 28}$$

3. Pour

$$c_0 = 4, \quad c_{n+1} = c_n + 3n + 2,$$

calculer  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$ .

**Corrigé**

La relation dépend de  $c_n$  et du rang  $n$  :

$$\begin{aligned}c_1 &= c_0 + 3 \times 0 + 2 \\ &= 4 + 0 + 2\end{aligned}$$

$$\boxed{c_1 = 6}$$

$$\begin{aligned}c_2 &= c_1 + 3 \times 1 + 2 \\ &= 6 + 3 + 2 \\ &= 9 + 2\end{aligned}$$

$$\boxed{c_2 = 11}$$

$$\begin{aligned}c_3 &= c_2 + 3 \times 2 + 2 \\ &= 11 + 6 + 2 \\ &= 17 + 2\end{aligned}$$

$$\boxed{c_3 = 19}$$

4. Préciser le mode de définition de chacune des trois suites.



**Corrigé**

La suite  $(a_n)$  est définie par son terme général. La suite  $(b_n)$  est définie par réurrence. La suite  $(c_n)$  est définie par une réurrence mixte, car la relation fait intervenir à la fois  $c_n$  et le rang  $n$ .

### Exercice 12 [\*] Approfondissement Modéliser une situation

Pour chaque situation, définir une suite en précisant son premier terme et une relation de récurrence.

1. Une ville compte 10 000 habitants. Chaque année, 80 % des habitants restent et 500 nouveaux habitants arrivent.



**Corrigé**

On note  $u_n$  la population de la ville après  $n$  années. La population initiale est donc

$$\boxed{u_0 = 10\,000}$$

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , 80 % des  $u_n$  habitants restent. Or

$$80\% \text{ de } u_n = \frac{80}{100} u_n$$

$$\boxed{80\% \text{ de } u_n = 0,8u_n}$$

On ajoute ensuite 500 nouveaux habitants. Ainsi :

$$\boxed{u_{n+1} = 0,8u_n + 500}$$

2. Un capital vaut initialement 1 500 euros. Chaque année, sa valeur augmente de 4 % puis on retire 20 euros.



**Corrigé**

On note  $v_n$  la valeur du capital, en euros, après  $n$  années. Initialement :

$$\boxed{v_0 = 1\,500}$$

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , une hausse de 4 % transforme  $v_n$  en

$$v_n + \frac{4}{100} v_n = v_n + 0,04v_n$$

$$\boxed{v_n + \frac{4}{100} v_n = 1,04v_n}$$

On retire ensuite 20 euros :

$$v_{n+1} = 1,04v_n - 20$$

3. Une association compte initialement 12 membres. Durant l'année numérotée  $n$  (la première est l'année 0), elle accueille  $2n+3$  nouveaux membres ; aucun membre ne part. Calculer aussi le nombre de membres après chacune des trois premières années.

**Corrigé**

On note  $w_n$  le nombre de membres après  $n$  années. Au départ :

$$w_0 = 12$$

Durant l'année numérotée  $n$ , l'association gagne  $2n+3$  membres et aucun membre ne part. Pour tout entier naturel  $n \geq 0$  :

$$w_{n+1} = w_n + (2n + 3)$$

$$w_{n+1} = w_n + 2n + 3$$

Calculons ensuite les trois premiers termes après  $w_0$  :

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 + 2 \times 0 + 3 \\ &= 12 + 0 + 3 \end{aligned}$$

$$w_1 = 15$$

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1 + 2 \times 1 + 3 \\ &= 15 + 2 + 3 \\ &= 17 + 3 \end{aligned}$$

$$w_2 = 20$$

$$\begin{aligned} w_3 &= w_2 + 2 \times 2 + 3 \\ &= 20 + 4 + 3 \\ &= 24 + 3 \end{aligned}$$

$$w_3 = 27$$

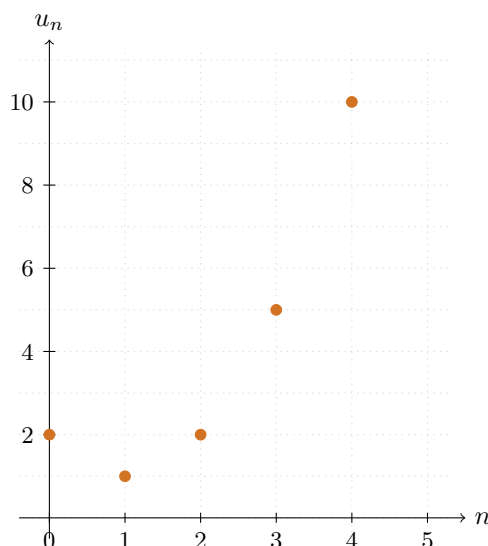
## Thème II

## Représentation graphique d'une suite

Exercice 13 **[!] Bilan** Représenter les premiers termes

On considère la suite définie par  $u_n = n^2 - 2n + 2$ .

1. Calculer  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .
2. Dans le repère ci-dessous, placer les points  $(n; u_n)$  pour  $0 \leq n \leq 4$ .
3. La représentation graphique d'une suite est-elle une courbe continue ?



## Corrigé

1.  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 2$ ,  $u_3 = 5$ ,  $u_4 = 10$ .
2. Les points sont  $(0; 2)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(2; 2)$ ,  $(3; 5)$  et  $(4; 10)$ .
3. Non : une suite est représentée par des points isolés d'abscisses entières.

## Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 14, page 21.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

## Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 15, page 23.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 14 **[+]** Consolidation Même travail, autres valeurs

On considère  $v_n = 2n + 1$ .

1. Calculer  $v_0$  à  $v_4$ .
2. Représenter les cinq points correspondants dans un repère.
3. Décrire l'allure des points.



## Corrigé

1.

$$v_0 = 1, \quad v_1 = 3, \quad v_2 = 5, \quad v_3 = 7, \quad v_4 = 9$$

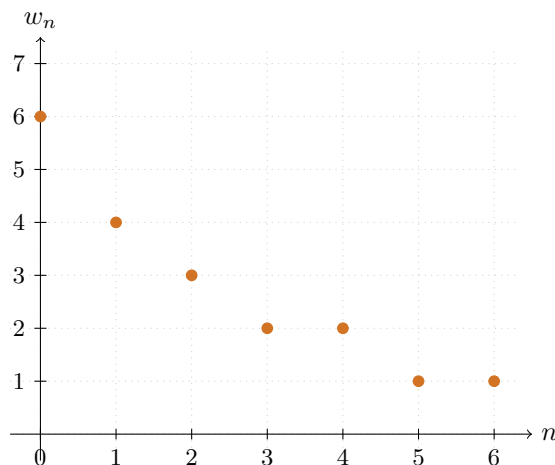
2. Les points à placer sont

$(0 ; 1)$ ,  $(1 ; 3)$ ,  $(2 ; 5)$ ,  $(3 ; 7)$ ,  $(4 ; 9)$ .

3. Ces cinq points sont alignés. Ils restent cependant isolés : la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe continue.

**Exercice 15** [\*] **Approfondissement Lire une suite sur un graphique**

Le graphique ci-dessous représente les premiers termes d'une suite  $(w_n)$ .



1. Lire  $w_0$ ,  $w_2$ ,  $w_4$  et  $w_6$ .
2. La suite semble-t-elle croissante, décroissante ou ni l'une ni l'autre ?

**Corrigé**

1. D'après le graphique,

$$w_0 = 6, \quad w_2 = 3, \quad w_4 = 2, \quad w_6 = 1.$$

2. Sur les rangs représentés, les valeurs ne croissent jamais lorsque  $n$  augmente. On conjecture donc que la suite  $(w_n)$  est décroissante.

**Thème III****Variations des suites définies par une formule****Méthode 1 : développer et réduire**

Pour une formule polynomiale, remplacer tous les  $n$  par  $n + 1$ , puis réduire  $u_{n+1} - u_n$ . Étudier le signe de cette différence pour chaque rang considéré : positif, la suite est croissante ; négatif, elle est décroissante. Si le signe est strict à chaque rang, la variation est stricte ; s'il change, préciser à quels rangs.

**Exercice 16** Étudier  $u_{n+1} - u_n$ 

On considère  $u_n = n^2 + 2n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on remplace  $n$  par  $n + 1$  dans la formule de  $u_n$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 + 2(n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = n^2 + 4n + 3$$

2. Calculer et simplifier  $u_{n+1} - u_n$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , d'après la question précédente,

$$u_{n+1} - u_n = (n^2 + 4n + 3) - (n^2 + 2n)$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = 2n + 3}$$

3. En déduire le sens de variation de  $(u_n)$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on a  $2n \geq 0$ . D'après la question précédente,

$$u_{n+1} - u_n = 2n + 3$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n \geq 3 > 0}$$

Donc  $u_{n+1} > u_n$  pour tout entier naturel  $n$ , ce qui implique que

$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

**Exercice 17** Même travail, autres valeurs

On considère  $v_n = n^2 + 4n - 1$ .

1. Exprimer  $v_{n+1}$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$v_{n+1} = (n+1)^2 + 4(n+1) - 1$$

$$\boxed{v_{n+1} = n^2 + 6n + 4}$$

2. Calculer  $v_{n+1} - v_n$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$v_{n+1} - v_n = (n^2 + 6n + 4) - (n^2 + 4n - 1)$$

$$\boxed{v_{n+1} - v_n = 2n + 5}$$

3. En déduire le sens de variation de  $(v_n)$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on a  $2n \geq 0$ . Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = 2n + 5$$

$$\boxed{v_{n+1} - v_n \geq 5 > 0}$$

Donc  $v_{n+1} > v_n$  pour tout entier naturel  $n$ , ce qui implique que

$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est strictement croissante.}}$

**Méthode 2 : mettre au même dénominateur**

Pour étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$ , réduire au même dénominateur, puis examiner le signe du numérateur et celui du dénominateur. Vérifier que le dénominateur ne s'annule à aucun rang considéré.

**Exercice 18 Une différence avec des fractions**

On considère  $w_n = \frac{n+1}{n+2}$ .

1. Calculer  $w_{n+1} - w_n$  et mettre au même dénominateur.

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , les nombres  $n+2$  et  $n+3$  sont strictement positifs : les quotients suivants sont définis. On obtient

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

2. En déduire le sens de variation de  $(w_n)$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , le dénominateur  $(n+2)(n+3)$  est strictement positif et le numérateur vaut  $1 > 0$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$w_{n+1} - w_n > 0$$

Donc  $w_{n+1} > w_n$  pour tout entier naturel  $n$ , ce qui implique que

la suite  $(w_n)$  est strictement croissante.

**Méthode 3 : mettre  $q^n$  en facteur**

Si  $u_n = aq^n + b$  avec  $q > 0$ , utiliser

$$q^{n+1} = q q^n, \quad u_{n+1} - u_n = aq^n(q - 1).$$

Le facteur  $q^n$  est strictement positif : étudier le signe de  $a(q - 1)$ .

**Exercice 19 Une suite de la forme  $aq^n + b$** 

On considère la suite  $(a_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$a_n = 5 \times 0,2^n + 3.$$

1. Calculer  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  puis conjecturer le sens de variation de  $(a_n)$ .

**Corrigé**

$$\begin{aligned}a_0 &= 5 \times 0,2^0 + 3 = 8, \\a_1 &= 5 \times 0,2 + 3 = 4, \\a_2 &= 5 \times 0,2^2 + 3 = 3,2.\end{aligned}$$

Ces premiers termes suggèrent que la suite  $(a_n)$  est décroissante.

2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$a_{n+1} - a_n = -4 \times 0,2^n.$$

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on utilise  $0,2^{n+1} = 0,2^n \times 0,2$  :

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= (5 \times 0,2^{n+1} + 3) - (5 \times 0,2^n + 3) \\&= 5 \times 0,2^{n+1} - 5 \times 0,2^n \\&= 5 \times (0,2^n \times 0,2) - 5 \times 0,2^n \\&= 5 \times 0,2^n \times (0,2 - 1)\end{aligned}$$

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = -4 \times 0,2^n}$$

3. En déduire le sens de variation de  $(a_n)$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on a

$$\begin{cases} 0,2^n > 0 \\ -4 < 0 \end{cases}.$$

Le produit d'un nombre strictement positif par un nombre strictement négatif est strictement négatif. D'après la question précédente,

$$a_{n+1} - a_n = -4 \times 0,2^n$$

$$\boxed{a_{n+1} - a_n < 0}$$

Donc  $a_{n+1} < a_n$  pour tout entier naturel  $n$ , ce qui implique que

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

**Exercice 20** **Même méthode, autres valeurs**

On considère la suite  $(b_n)$  définie par

$$b_n = 4 \times 0,5^n - 2.$$

1. Calculer  $b_0$ ,  $b_1$  et  $b_2$  puis conjecturer son sens de variation.

**Corrigé**

Par substitution,  $b_0 = 4 - 2 = 2$ ,  $b_1 = 4 \times 0,5 - 2 = 0$  et  $b_2 = 4 \times 0,5^2 - 2 = -1$ . Ces trois valeurs suggèrent une décroissance, sans encore la démontrer.

2. Factoriser  $b_{n+1} - b_n$  par  $0,5^n$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on utilise  $0,5^{n+1} = 0,5^n \times 0,5$  :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= (4 \times 0,5^{n+1} - 2) - (4 \times 0,5^n - 2) \\ &= 4 \times 0,5^{n+1} - 4 \times 0,5^n \\ &= 4 \times (0,5^n \times 0,5) - 4 \times 0,5^n \\ &= 4 \times 0,5^n (0,5 - 1) \end{aligned}$$

$$b_{n+1} - b_n = -2 \times 0,5^n$$

3. En déduire le sens de variation de  $(b_n)$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,  $0,5^n > 0$  et  $-2 < 0$ . Ainsi,

$$b_{n+1} - b_n = -2 \times 0,5^n$$

$$b_{n+1} - b_n < 0$$

Donc  $b_{n+1} < b_n$  à tout rang :

La suite  $(b_n)$  est strictement décroissante.

**Exercice 21 Un coefficient négatif**

On considère la suite  $(c_n)$  définie par

$$c_n = 3 - 2 \times 1,4^n.$$

1. Calculer  $c_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$  puis conjecturer son sens de variation.

**Corrigé**

Par substitution,  $c_0 = 3 - 2 = 1$ ,  $c_1 = 3 - 2 \times 1,4 = 0,2$  et  $c_2 = 3 - 2 \times 1,4^2 = 3 - 2 \times 1,96 = -0,92$ . Ces premiers termes suggèrent que la suite  $(c_n)$  est décroissante ; il s'agit seulement d'une conjecture.

2. Calculer puis factoriser  $c_{n+1} - c_n$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , en utilisant  $1,4^{n+1} = 1,4^n \times 1,4$ ,

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= (3 - 2 \times 1,4^{n+1}) - (3 - 2 \times 1,4^n) \\ &= -2 \times 1,4^{n+1} + 2 \times 1,4^n \\ &= -2 \times (1,4^n \times 1,4) + 2 \times 1,4^n \\ &= -2 \times 1,4^n (1,4 - 1) \end{aligned}$$

$$c_{n+1} - c_n = -0,8 \times 1,4^n$$

3. En déduire le sens de variation de  $(c_n)$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on a  $1,4^n > 0$  et  $-0,8 < 0$ . Ainsi,

$$c_{n+1} - c_n = -0,8 \times 1,4^n$$

$$c_{n+1} - c_n < 0$$

Donc  $c_{n+1} < c_n$  à tout rang :

La suite  $(c_n)$  est strictement décroissante.

**Exercice 22 Suites explicites : quatre études de variation**

Dans chacun des cas, déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$  définie par :

1.  $u_n = \frac{n+1}{n+2}$  pour tout  $n \geq 0$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , les nombres  $n+2$  et  $n+3$  sont strictement positifs ; les deux quotients sont donc bien définis. On calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)(n+2) - (n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n^2 + 4n + 4) - (n^2 + 4n + 3)}{(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$\begin{cases} 1 > 0 \\ n+2 \geq 2 > 0 \\ n+3 \geq 3 > 0 \end{cases} \implies u_{n+1} - u_n > 0.$$

Donc  $u_{n+1} > u_n$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$ . Par conséquent,

la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

2.  $u_n = \frac{3^n}{n}$  pour tout  $n \geq 1$ .

**Corrigé**

Pour tout entier  $n \geq 1$ , les dénominateurs  $n$  et  $n+1$  sont strictement positifs. En utilisant  $3^{n+1} = 3^n \times 3$ , on

calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n} \\ &= \frac{n \times 3^{n+1} - (n+1)3^n}{n(n+1)} \\ &= \frac{n \times 3^n \times 3 - (n+1)3^n}{n(n+1)} \\ &= \frac{3^n(3n - (n+1))}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{3^n(2n-1)}{n(n+1)}}$$

Pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\begin{cases} 3^n > 0 \\ 2n-1 \geq 1 > 0 \\ n \geq 1 > 0 \\ n+1 \geq 2 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n > 0.$$

Donc  $u_{n+1} > u_n$  pour tout entier  $n \geq 1$ . Par conséquent,

**la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est strictement croissante.**

3.  $u_n = n^2 - 3n + 12$  pour tout  $n \geq 0$ .



**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 3(n+1) + 12 - (n^2 - 3n + 12) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 12 - n^2 + 3n - 12 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = 2(n-1)}$$

Le facteur 2 est strictement positif. Pour le second facteur, on distingue les rangs autorisés :

$$\begin{cases} n = 0 \Rightarrow n-1 = -1 < 0 \\ n = 1 \Rightarrow n-1 = 0 \\ n \geq 2 \Rightarrow n-1 \geq 1 > 0 \end{cases}.$$

Ainsi  $u_1 - u_0 < 0$ ,  $u_2 - u_1 = 0$ , puis  $u_{n+1} - u_n > 0$  pour tout entier  $n \geq 2$ . Autrement dit,

$$\boxed{u_0 > u_1 = u_2 < u_3 < u_4 < \dots}$$

La suite décroît strictement de  $u_0$  à  $u_1$ , reste constante entre  $u_1$  et  $u_2$ , puis croît strictement à partir du rang 2.

4.  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  pour tout  $n \geq 1$ .



**Corrigé**

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on met d'abord les fractions au même dénominateur :

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Puis, pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n - (n+2)}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)}$$

Or, pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\begin{cases} -2 < 0 \\ n \geq 1 > 0 \\ n+1 \geq 2 > 0 \\ n+2 \geq 3 > 0 \end{cases} \implies \boxed{u_{n+1} - u_n < 0}.$$

Donc  $u_{n+1} < u_n$  pour tout entier  $n \geq 1$ , ce qui prouve que

la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est strictement décroissante.

### Exercice 23 Suites explicites : deux autres exemples

Étudier le sens de variation des suites suivantes en comparant  $u_{n+1}$  et  $u_n$

1.  $(u_n)$  est la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = \frac{n}{n+1}$ .



Corrigé

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , les dénominateurs  $n+1$  et  $n+2$  sont strictement positifs ; les quotients sont donc définis. On calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - (n^2 + 2n)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$\begin{cases} 1 > 0 \\ n+1 \geq 1 > 0 \\ n+2 \geq 2 > 0 \end{cases} \implies u_{n+1} - u_n > 0.$$

Donc  $u_{n+1} > u_n$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , et la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

2.  $(u_n)$  est la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = 5 \times 0,2^n + 3$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on utilise  $0,2^{n+1} = 0,2^n \times 0,2$  :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= (5 \times 0,2^{n+1} + 3) - (5 \times 0,2^n + 3) \\&= 5 \times (0,2^n \times 0,2) - 5 \times 0,2^n \\&= 5 \times 0,2^n (0,2 - 1)\end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = -4 \times 0,2^n}$$

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$\begin{cases} 0,2^n > 0 \\ -4 < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n < 0.$$

Donc  $u_{n+1} < u_n$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$ . Par conséquent, la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.

## Thème IV

## Variations des suites définies par récurrence

Méthode 4 : utiliser une borne sur  $u_n$ 

Calculer  $u_{n+1} - u_n$  en fonction de  $u_n$ .

- Par exemple, si  $u_{n+1} = au_n + b$ , alors  $u_{n+1} - u_n = (a - 1)u_n + b$ .
- Utiliser ensuite une borne donnée sur  $u_n$  pour déterminer le signe de cette différence.
- Quelques premiers termes permettent de conjecturer, mais pas de conclure.

## Exercice 24 Suite récurrente : utiliser un majorant

On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 = 10, \quad u_{n+1} = 0,9u_n + 5.$$

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . Conjecturer le sens de variation de  $(u_n)$ .



## Corrigé

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,9 \times 10 + 5 = 14, \\ u_2 &= 0,9 \times 14 + 5 = 17,6, \\ u_3 &= 0,9 \times 17,6 + 5 = 20,84. \end{aligned}$$

On conjecture que  $(u_n)$  est croissante.

2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = 0,1(50 - u_n).$$



## Corrigé

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (0,9u_n + 5) - u_n \\ &= 5 - 0,1u_n \end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = 0,1(50 - u_n)}$$

3. On admet que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq 50$ . En déduire le sens de variation de  $(u_n)$ .



## Corrigé

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , l'hypothèse  $u_n \leq 50$  donne  $50 - u_n \geq 0$ . Le facteur 0,1 est strictement positif; ainsi,

$$u_{n+1} - u_n = 0,1(50 - u_n)$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n \geq 0}$$

Donc  $u_{n+1} \geq u_n$  pour tout entier naturel  $n$ , ce qui implique que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

**Exercice 25** Même méthode avec un minorant

On considère la suite  $(v_n)$  définie par

$$v_0 = 80, \quad v_{n+1} = 0,8v_n + 10.$$

1. Calculer  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ . Conjecturer le sens de variation de  $(v_n)$ .

**Corrigé**

$$\begin{aligned} v_1 &= 0,8 \times 80 + 10 = 74, \\ v_2 &= 0,8 \times 74 + 10 = 69,2, \\ v_3 &= 0,8 \times 69,2 + 10 = 65,36. \end{aligned}$$

On conjecture que  $(v_n)$  est décroissante.

2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_{n+1} - v_n = 0,2(50 - v_n).$$

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (0,8v_n + 10) - v_n \\ &= 10 - 0,2v_n \end{aligned}$$

$$v_{n+1} - v_n = 0,2(50 - v_n)$$

3. On admet que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \geq 50$ . En déduire le sens de variation de  $(v_n)$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on admet que  $v_n \geq 50$ ; ainsi  $50 - v_n \leq 0$ . Comme  $0,2 > 0$ ,

$$v_{n+1} - v_n = 0,2(50 - v_n)$$

$$v_{n+1} - v_n \leq 0$$

Donc  $v_{n+1} \leq v_n$  pour tout entier naturel  $n$ , ce qui implique que

La suite  $(v_n)$  est décroissante.

**Exercice 26** Suites définies par récurrence

1. Soit  $u$  la suite définie pour tout entier  $n$  par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

On admet que pour tout entier  $n$ , on a  $u_n \geq 0$ .

Étudier le sens de variation de  $u$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on calcule la différence entre deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n$$

La donnée  $u_n \geq 0$  permet déjà d'obtenir  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ . Pour établir la croissance stricte, montrons que tous les termes sont strictement positifs. On a  $u_0 = 1 > 0$  et, si  $u_n > 0$ , alors  $u_{n+1} = 2u_n > 0$ . Ainsi, par récurrence,  $u_n > 0$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$ .

Par conséquent, pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = u_n \\ u_n > 0 \end{cases} \implies u_{n+1} - u_n > 0.$$

Donc  $u_{n+1} > u_n$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , et

La suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

2. Soit  $v$  la suite définie pour tout entier  $n$  par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = v_n - 5 \end{cases}$$

Étudier le sens de variation de  $v$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$v_{n+1} - v_n = (v_n - 5) - v_n$$

$$v_{n+1} - v_n = -5 < 0$$

Donc  $v_{n+1} < v_n$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$ . Par conséquent,

La suite  $(v_n)$  est strictement décroissante.

3. Soit  $w$  la suite définie pour tout entier  $n$  par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} w_0 = 100 \\ w_{n+1} = 1,5w_n - 20 \end{cases}$$

3. a. Calculer les 3 premiers termes de la suite et faire une conjecture sur les variations.

**Corrigé**

$$w_1 = 1,5 \times 100 - 20 = 150 - 20 = 130, \quad w_2 = 1,5 \times 130 - 20 = 195 - 20 = 175,$$

$$w_3 = 1,5 \times 175 - 20 = 262,5 - 20 = 242,5.$$

Ainsi  $w_0 = 100$ ,  $w_1 = 130$ ,  $w_2 = 175$ ,  $w_3 = 242,5$ . On observe une croissance terme à terme.

Conjecture :  $(w_n)$  est strictement croissante.

3. b. On admet que pour tout entier  $n$ , on a  $w_n \geq 50$ .

Étudier le sens de variation de  $w$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}w_{n+1} - w_n &= (1,5w_n - 20) - w_n \\ &= 0,5w_n - 20\end{aligned}$$

$$\boxed{w_{n+1} - w_n = 0,5(w_n - 40)}$$

Or, pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on admet que  $w_n \geq 50$ . Ainsi,

$$\begin{cases} 0,5 > 0 \\ w_n - 40 \geq 10 > 0 \end{cases} \implies w_{n+1} - w_n > 0.$$

Donc  $w_{n+1} > w_n$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$ . Par conséquent,

$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est strictement croissante.}}$

## Thème V

## Variations des suites : le Bilan

## Exercice 27 Vrai ou faux : variations et bornes

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant vos réponses. Une réponse non justifiée ne rapporte pas de points.

1. Une suite est soit croissante, soit décroissante.



Corrigé

**Faux.** Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , prenons  $u_n = (-1)^n$ . Alors  $u_0 = 1 > u_1 = -1$ , ce qui exclut une suite croissante, mais  $u_1 = -1 < u_2 = 1$ , ce qui exclut une suite décroissante. Cet exemple n'est donc pas monotone.

2. Une suite croissante est minorée.



Corrigé

**Vrai.** Soit une suite  $(u_n)$  définie à partir du rang 0 et croissante. Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , la croissance donne  $u_n \geq u_0$ . Le réel  $u_0$  est donc un minorant de la suite.

3. Une suite croissante est toujours majorée.



Corrigé

**Faux.** Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , prenons  $u_n = n$ . Cette suite vérifie  $u_{n+1} - u_n = 1 > 0$ . Quel que soit le réel  $M$  proposé comme majorant, on peut choisir un entier  $n > M$  ; alors  $u_n > M$ .

4. Une suite croissante est parfois majorée.

*Autre formulation : il existe des suites croissantes et majorées.*



Corrigé

**Vrai.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , prenons  $u_n = 1 - 1/n$ . Alors  $u_{n+1} - u_n = 1/n - 1/(n+1) = 1/[n(n+1)] > 0$ , et  $u_n \leq 1$ . Cette suite est donc croissante et majorée par 1.

5. Une suite décroissante est toujours majorée.



Corrigé

**Vrai.** Soit une suite  $(v_n)$  définie à partir du rang 0 et décroissante. Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on a  $v_n \leq v_0$ . Ainsi,  $v_0$  est un majorant de la suite.

6. Une suite décroissante est toujours minorée.



Corrigé

**Faux.** Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , prenons  $v_n = -n$ . Cette suite vérifie  $v_{n+1} - v_n = -1 < 0$ . Quel que soit le réel  $m$  proposé comme minorant, on peut choisir  $n > -m$  ; alors  $v_n = -n < m$ .

7. Une suite décroissante est parfois minorée.

*Autre formulation : il existe des suites décroissantes et minorées.*

**Corrigé**

**Vrai.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , prenons  $v_n = 1/n$ . On a  $v_{n+1} - v_n = -1/[n(n+1)] < 0$  et  $v_n > 0$  : elle est décroissante et minorée par 0.

8. Une suite ne peut pas être croissante et bornée.

**Corrigé**

**Faux.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , la suite définie par  $u_n = 1 - 1/n$  est croissante car  $u_{n+1} - u_n = 1/[n(n+1)] > 0$ . De plus  $0 \leq u_n < 1$  : elle est à la fois minorée et majorée.

9. Une suite ne peut pas être décroissante et bornée.

**Corrigé**

**Faux.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , la suite définie par  $v_n = 1/n$  vérifie  $v_{n+1} - v_n = -1/[n(n+1)] < 0$ , tandis que  $0 < v_n \leq 1$ . Elle est décroissante et bornée.

10. Une suite croissante et majorée est bornée.

**Corrigé**

**Vrai.** Soit une suite  $(u_n)$  définie à partir du rang 0, croissante et majorée par  $M$ . Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on a  $u_0 \leq u_n \leq M$ . Elle admet donc  $u_0$  comme minorant et  $M$  comme majorant : elle est bornée.

11. Une suite décroissante et minorée est bornée.

**Corrigé**

**Vrai.** Soit une suite  $(v_n)$  définie à partir du rang 0, décroissante et minorée par  $m$ . Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on a  $m \leq v_n \leq v_0$  : elle est donc bornée.

**Exercice 28** **[!] Bilan Bilan de la section : étudier les variations**

Pour chacune des suites suivantes, calculer  $u_{n+1} - u_n$  puis déterminer son sens de variation.

1.  $u_n = \frac{n+1}{n+2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , les dénominateurs  $n+2$  et  $n+3$  sont strictement positifs. De plus,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$$

Donc  $u_{n+1} > u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : la suite est strictement croissante.

2.  $u_n = 3 \times 0,5^n + 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , la base  $0,5$  étant positive,  $0,5^n > 0$ . En factorisant ce terme,

$$u_{n+1} - u_n = 3 \times 0,5^n (0,5 - 1)$$

$$u_{n+1} - u_n = -1,5 \times 0,5^n < 0$$

Donc  $u_{n+1} < u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : la suite est strictement décroissante.

3.  $u_0 = 80$  et  $u_{n+1} = 1,25u_n - 10$ . On admet que  $u_n \geq 40$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , d'après l'hypothèse  $u_n \geq 40$ ,

$$u_{n+1} - u_n = 1,25u_n - 10 - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{0,25}_{>0} (\underbrace{u_n - 40}_{\geq 0}) \geq 0$$

Donc  $u_{n+1} \geq u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : la suite est croissante.

4.  $u_n = n^2 - 6n + 4$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , en remplaçant  $n$  par  $n + 1$ ,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 6(n+1) + 4 - (n^2 - 6n + 4)$$

$$u_{n+1} - u_n = 2n - 5$$

Si  $n \in \{0, 1, 2\}$ ,  $2n - 5 < 0$ , donc  $u_{n+1} < u_n$ . Si  $n \geq 3$ ,  $2n - 5 > 0$ , donc  $u_{n+1} > u_n$ . La suite est strictement décroissante de  $u_0$  à  $u_3$ , puis strictement croissante à partir de  $u_3$ .

**Parcours A – Consolider**

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 29, page 38.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

**Parcours B – Approfondissement**

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 30, page 40.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

**Exercice 29** **[+] Consolidation** Même bilan, avec d'autres valeurs

Pour chacune des suites suivantes, calculer  $u_{n+1} - u_n$  puis déterminer son sens de variation.

1.  $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , les dénominateurs  $n + 3$  et  $n + 4$  sont strictement positifs. On obtient

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} \\ &= \frac{(2n+3)(n+3) - (2n+1)(n+4)}{(n+3)(n+4)} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+3)(n+4)} > 0$$

Donc  $u_{n+1} > u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : la suite est strictement croissante.

2.  $u_n = 4 \times 0,25^n - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , puisque  $0,25 > 0$ , on a  $0,25^n > 0$ . En factorisant,

$$u_{n+1} - u_n = 4 \times 0,25^n (0,25 - 1)$$

$$u_{n+1} - u_n = -3 \times 0,25^n < 0$$

Donc  $u_{n+1} < u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : la suite est strictement décroissante.

3.  $u_0 = 100$  et  $u_{n+1} = 1,2u_n - 15$ . On admet que  $u_n \geq 75$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , par hypothèse,  $u_n \geq 75$ . Donc

$$u_{n+1} - u_n = 0,2u_n - 15$$

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{0,2}_{>0} \underbrace{(u_n - 75)}_{\geq 0} \geq 0$$

Donc  $u_{n+1} \geq u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : la suite est croissante.

4.  $u_n = n^2 - 8n + 3$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , la substitution donne

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 8(n+1) + 3 - (n^2 - 8n + 3)$$

$$u_{n+1} - u_n = 2n - 7$$

Si  $0 \leq n \leq 3$ ,  $2n - 7 < 0$ , donc  $u_{n+1} < u_n$ . Si  $n \geq 4$ ,  $2n - 7 > 0$ , donc  $u_{n+1} > u_n$ . La suite décroît strictement jusqu'à  $u_4$ , puis croît strictement à partir de  $u_4$ .

**Exercice 30** [\*] **Approfondissement Une variation qui change de sens**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (n+2) \left(\frac{3}{4}\right)^n$ .

1. Calculer les quatre premiers termes et conjecturer les variations de la suite.

**Corrigé**

Les quatre premiers termes (rangs 0 à 3) sont

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}, \quad u_2 = 4 \times \frac{9}{16} = \frac{9}{4}, \quad u_3 = 5 \times \frac{27}{64} = \frac{135}{64}.$$

On conjecture une hausse initiale, puis un palier et une baisse.

2. Montrer que

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1-n}{4}.$$

**Corrigé**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+3) \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - (n+2) \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}(n+3) - (n+2)\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1-n}{4}. \end{aligned}$$

3. En déduire les variations de  $(u_n)$ .

**Corrigé**

Le premier facteur est strictement positif. La différence est positive pour  $n = 0$ , nulle pour  $n = 1$ , puis négative pour  $n \geq 2$ . Ainsi  $u_0 < u_1 = u_2$ , et la suite décroît strictement à partir de  $u_2$ .

## Thème VI

## Python : calculer des termes, une liste et un seuil

## Exemple résolu 1 Calculer un terme

## Définition de la suite

$u_0 = 2$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = u_n + 3.$$

La fonction renvoie seulement  $u_n$ . Pour calculer  $u_3$ , il faut effectuer trois étapes à partir de  $u_0$ .

Ainsi, `terme(3)` renvoie  $u_3 = 11$ .

## Fonction associée

```
def terme(n):
    u = 2
    for k in range(n):
        u = u + 3
    return u
```

## Exercice 31 Calculer un terme : trois définitions

Compléter chaque fonction, puis déterminer à la main la valeur renvoyée pour  $n = 2$ .

## 1. Suite définie par récurrence

$a_0 = 4$  et  $a_{n+1} = 3a_n + 1$ .

```
def a(n):
    u = 4
    for k in range(.....):
        u = .....
    return u
```



## Corrigé

`range(n)` puis `u = 3*u + 1`. On a  $a_1 = 13$  et  $a_2 = 40$ .

## 2. Suite définie par son terme général

$b_n = 2n^2 + 3$ .

```
def b(n):
    return .....
```



## Corrigé

`return 2*n**2 + 3`. On a  $b_2 = 11$ .

## 3. Récurrence avec le rang

$c_0 = 5$  et  $c_{n+1} = c_n + 2n + 1$ .

```
def c(n):
    u = 5
    for k in range(.....):
        u = .....
    return u
```



## Corrigé

`range(n)` puis `u = u + 2*k + 1`. Au tour  $k = 0$ , on calcule  $c_1 = 6$ ; au tour  $k = 1$ , on calcule  $c_2 = 9$ .

**Exemple résolu 2 Construire la liste des termes****Définition de la suite**

$u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = u_n + 3$ . On part de la liste  $[u_0]$  et chaque tour ajoute le terme suivant. Après  $n$  tours, on obtient  $[u_0, u_1, \dots, u_n]$ .

Ainsi, `termes(3)` renvoie  $[2, 5, 8, 11]$ .

**Fonction associée**

```
def termes(n):
    u = 2
    L = [u]
    for k in range(n):
        u = u + 3
        L.append(u)
    return L
```

**Exercice 32 Construire la liste  $[u_0, \dots, u_n]$** 

Le paramètre  $n$  est un entier naturel. Compléter les deux programmes, puis donner les listes renvoyées lorsque  $n = 3$ .

## 1. Suite définie par récurrence

$a_0 = 4$  et  $a_{n+1} = 3a_n + 1$ .

```
def termes_a(n):
    u = 4
    L = [u]
    for k in range(.....):
        u = .....
        L.append(.....)
    return L
```

## 2. Suite définie par son terme général

$b_n = 2n^2 + 3$ .

```
def termes_b(n):
    L = []
    for k in range(.....):
        L.append(.....)
    return L
```

**Corrigé**

1. `range(n)`, `u = 3*u + 1`, puis `L.append(u)`. La liste est  $[4, 13, 40, 121]$ .

2. `range(n+1)` puis `L.append(2*k**2 + 3)`. La liste est  $[3, 5, 11, 21]$ .

Dans le premier programme, `L` contient déjà  $u_0$ , puis chaque tour ajoute un terme. Dans le second, `L` part de la liste vide : il faut parcourir les  $n + 1$  indices de 0 à  $n$ .

**Exemple résolu 3 Chercher un seuil****Définition de la suite**

$u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = u_n + 3$ . On cherche le premier rang  $n$  tel que  $u_n \geq M$ . Tant que  $u_n < M$ , on calcule le terme suivant et on augmente le rang.

**Fonction associée**

```
def seuil(M):
    u = 2
    n = 0
    while u < M:
        u = u + 3
        n = n + 1
    return n
```

Ainsi, `seuil(10)` renvoie 3, car  $u_2 = 8 < 10 \leq u_3 = 11$ .

**Exercice 33 Chercher le premier rang d'un seuil**

Compléter la fonction qui renvoie le plus petit rang  $n$  pour lequel  $v_n \geq M$ . Déterminer `seuil(18)` et `seuil(5)`.

### Définition de la suite

$v_0 = 5$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_{n+1} = v_n + 4.$$

```
def seuil(M):  
    n = 0  
    v = 5  
    while .....:  
        v = .....  
        n = .....  
    return n
```



### Corrigé

On complète par  $v < M$ ,  $v = v + 4$  et  $n = n + 1$ . La boucle s'arrête dès que  $v_n \geq M$ . Comme  $v_n = 5 + 4n$  croît sans borne, elle finit par s'arrêter pour tout seuil réel  $M$ . On obtient  $v_3 = 17 < 18$  et  $v_4 = 21 \geq 18$  : `seuil(18) = 4`.

Comme  $v_0 = 5$ , `seuil(5) = 0` : la boucle ne s'exécute pas.

**Exercice 34**  **Bilan Python : terme, liste et seuil**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

1. **Calculer un terme.** Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie  $u_n$ .

```
def terme(n):
    u = 3
    for k in range(.....):
        u = .....
    return u
```

Déterminer ensuite la valeur renvoyée par `terme(4)`.

**Corrigé**

Pour calculer  $u_n$  à partir de  $u_0$ , il faut effectuer  $n$  mises à jour. On complète donc par `range(n)` et `u = 2*u + 1` :

```
def terme(n):
    u = 3
    for k in range(n):
        u = 2*u + 1
    return u
```

On calcule successivement

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \times 3 + 1 = 7, \\ u_2 &= 2 \times 7 + 1 = 15, \\ u_3 &= 2 \times 15 + 1 = 31, \\ u_4 &= 2 \times 31 + 1 = 63. \end{aligned}$$

Ainsi, `terme(4)` renvoie 63.

2. **Construire la liste des termes.** Compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie la liste  $[u_0, u_1, \dots, u_n]$ .

```
def termes(n):
    u = 3
    L = [u]
    for k in range(.....):
        u = .....
        L.append(.....)
    return L
```

Donner la liste renvoyée par `termes(4)`.

**Corrigé**

La liste contient déjà  $u_0$ . Il faut donc effectuer  $n$  mises à jour et ajouter chaque nouveau terme à la liste :

```
def termes(n):
    u = 3
    L = [u]
    for k in range(n):
        u = 2*u + 1
        L.append(u)
    return L
```

D'après les calculs précédents,

$$\text{termes}(4) = [3, 7, 15, 31, 63].$$

La liste comporte bien 5 valeurs :  $u_0, u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ .

**3. Chercher un seuil.** Compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie le plus petit rang  $n$  tel que  $u_n \geq M$ .

```
def seuil(M):
    n = 0
    u = 3
    while .....:
        u = .....
        n = .....
    return n
```

Déterminer la valeur renvoyée par `seuil(100)` et la justifier à l'aide des termes de la suite.



### Corrigé

On doit poursuivre les calculs tant que le seuil n'est pas atteint, c'est-à-dire tant que  $u < M$ . À chaque passage dans la boucle, on calcule le terme suivant et on augmente le rang de 1 :

```
def seuil(M):
    n = 0
    u = 3
    while u < M:
        u = 2*u + 1
        n = n + 1
    return n
```

Or  $u_4 = 63 < 100$  et

$$u_5 = 2 \times 63 + 1 = 127 \geq 100.$$

Le premier rang pour lequel  $u_n \geq 100$  est donc 5, ainsi

$$\text{seuil}(100) = 5.$$

### Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 35, page 45.

*Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.*

### Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 36, page 46.

*Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.*

## Exercice 35 **[+]** Consolidation Même travail, autres valeurs

On considère la suite  $(v_n)$  définie par

$$v_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad v_{n+1} = 3v_n + 2.$$

**1. Calculer un terme.** Compléter la fonction afin qu'elle renvoie  $v_n$ , puis déterminer la valeur renvoyée par `terme(3)`.

```
def terme(n):
    v = 2
    for k in range(.....):
        v = .....
    return v
```

**Corrigé**

On complète par `range(n)` et  $v = 3*v + 2$ .

$$v_1 = 3 \times 2 + 2 = 8,$$

$$v_2 = 3 \times 8 + 2 = 26,$$

$$v_3 = 3 \times 26 + 2 = 80.$$

Ainsi, `terme(3)` renvoie `80`.

- 2. Construire la liste des termes.** Compléter la fonction afin qu'elle renvoie  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ , puis donner la liste renvoyée par `termes(3)`.

```
def termes(n):
    v = 2
    L = [v]
    for k in range(.....):
        v = .....
        L.append(.....)
    return L
```

**Corrigé**

On complète par `range(n)`,  $v = 3*v + 2$  et `L.append(v)`. Ainsi,

$$\text{termes}(3) = [2, 8, 26, 80].$$

- 3. Chercher un seuil.** Compléter la fonction afin qu'elle renvoie le plus petit rang  $n$  tel que  $v_n \geq M$ , puis déterminer `seuil(200)`.

```
def seuil(M):
    n = 0
    v = 2
    while .....:
        v = .....
        n = .....
    return n
```

**Corrigé**

On complète par  $v < M$ ,  $v = 3*v + 2$  et  $n = n + 1$ . Comme  $v_3 = 80 < 200$  et

$$v_4 = 3 \times 80 + 2 = 242 \geq 200,$$

on obtient

$$\text{seuil}(200) = 4.$$

### Exercice 36 **[\*] Approfondissement** Trois algorithmes avec une récurrence dépendant du rang

On considère la suite  $(w_n)$  définie par

$$w_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad w_{n+1} = w_n + 2n + 3.$$

Dans la boucle Python, lorsque la variable `k` vaut  $k$ , la variable contenant le terme de la suite contient  $w_k$  avant la mise à jour.

- 1.** Compléter la fonction qui renvoie  $w_n$ , puis déterminer `terme(4)`.

```
def terme(n):
    w = 1
    for k in range(.....):
        w = .....
    return w
```

**Corrigé**

Pour passer de  $w_k$  à  $w_{k+1}$ , on doit ajouter  $2k + 3$ . On complète donc par `range(n)` et `w = w + 2*k + 3`.

$$w_1 = 1 + 2 \times 0 + 3 = 4,$$

$$w_2 = 4 + 2 \times 1 + 3 = 9,$$

$$w_3 = 9 + 2 \times 2 + 3 = 16,$$

$$w_4 = 16 + 2 \times 3 + 3 = 25.$$

Ainsi, `terme(4)` renvoie `25`.

2. Compléter la fonction qui renvoie  $[w_0, w_1, \dots, w_n]$ , puis donner `termes(4)`.

```
def termes(n):
    w = 1
    L = [w]
    for k in range(.....):
        w = .....
        L.append(.....)
    return L
```

**Corrigé**

On complète par `range(n)`, `w = w + 2*k + 3` et `L.append(w)`. On obtient

$$\text{termes}(4) = [1, 4, 9, 16, 25].$$

3. Compléter la fonction qui renvoie le plus petit rang  $n$  tel que  $w_n \geq M$ . Attention : dans une boucle `while`, il faut disposer du rang courant pour appliquer la relation de récurrence.

```
def seuil(M):
    n = 0
    w = 1
    while .....:
        w = .....
        n = .....
    return n
```

Déterminer `seuil(50)`.

**Corrigé**

Lorsque le rang courant est  $n$ , la relation donne  $w_{n+1} = w_n + 2n + 3$ . Il faut donc mettre à jour  $w$  avant d'augmenter  $n$  :

```
def seuil(M):
    n = 0
    w = 1
    while w < M:
        w = w + 2*n + 3
        n = n + 1
    return n
```

On poursuit les calculs :  $w_4 = 25$ , puis

$$w_5 = 25 + 2 \times 4 + 3 = 36,$$

$$w_6 = 36 + 2 \times 5 + 3 = 49,$$

$$w_7 = 49 + 2 \times 6 + 3 = 64.$$

Ainsi  $w_6 = 49 < 50 \leq w_7 = 64$ , donc

$$\text{seuil}(50) = 7.$$

**Exercice 37 Lire une formule dans un tableur**

On souhaite calculer les termes d'une suite à l'aide d'un tableur.

|   | A     | B  | C                | D | E | F |
|---|-------|----|------------------|---|---|---|
| 1 | $n$   | 0  | 1                | 2 | 3 | 4 |
| 2 | $u_n$ | -2 | $=3*C1^2+5*C1-2$ |   |   |   |
| 3 |       |    |                  |   |   |   |

1. Si on étend la formule de la case **C2** à la case **D2**, quelle est la valeur de  $u_2$  ?
2. Exprimer le terme général  $u_n$  en fonction de  $n$  en utilisant la formule donnée par le tableur.

**Corrigé**

La formule calcule  $u_n = 3n^2 + 5n - 2$ . Pour  $n = 2$  :

$$u_2 = 3 \times 2^2 + 5 \times 2 - 2 = 20.$$

Ainsi,  $u_2 = 20$  et  $u_n = 3n^2 + 5n - 2$ .

**Exercice 38 Lire une fonction Python**

On considère l'algorithme suivant :

```
1 # Dans l'éditeur Python
2 def u(n):
3     return 2**n - 1
```

1. Que renvoie l'instruction  $u(6)$  ?
2. On appelle  $(u_n)$  la suite associée aux valeurs calculées par l'algorithme.  
Donner l'expression du terme général de cette suite.

**Corrigé**

La fonction renvoie  $2^n - 1$ . Donc

$$u(6) = 2^6 - 1 = 63 \quad \text{et} \quad u_n = 2^n - 1.$$

**Exercice 39 Retrouver une récurrence dans un tableur**

On souhaite calculer les termes d'une suite à l'aide d'un tableur.

1.

|   | A   | B           |
|---|-----|-------------|
| 1 | $n$ | $u_n$       |
| 2 | 0   | 3           |
| 3 | 1   | $=3*B2 + 1$ |
| 4 | 2   |             |
| 5 |     |             |

2.

|   | A   | B            |
|---|-----|--------------|
| 1 | $n$ | $u_n$        |
| 2 | 0   | -1           |
| 3 | 1   | $=B2 + 2*A3$ |
| 4 | 2   |              |
| 5 |     |              |

Pour chacune des feuilles de calcul, écrire la relation donnant  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .

**Corrigé**

Dans la première feuille,  $u_0 = 3$  et la formule saisie multiplie le terme précédent par 3 avant d'ajouter 1. Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , cela donne

$$u_{n+1} = 3u_n + 1.$$

Dans la seconde,  $u_0 = -1$  et la formule ajoute deux fois le nombre de la colonne A sur la nouvelle ligne. Comme ce

rang est  $n + 1$ , pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} = u_n + 2(n+1).$$

### Exercice 40 Retrouver une récurrence dans un programme

On considère l'algorithme ci-contre définissant une suite  $(u_n)$  :

```

1 # Dans l'éditeur Python
2 def u(n):
3     u = 1
4     for i in range(1,n+1):
5         u = (u - 1) / (u - 2)
6     return u

```

1. Que renvoie l'instruction  $u(2)$  ?
2. Écrire une relation entre  $u_{n+1}$  et  $u_n$ .



#### Corrigé

La valeur initiale est  $u_0 = 1$ . La boucle `range(1,n+1)` effectue exactement  $n$  itérations. Pour calculer  $u_2$ , elle effectue donc deux mises à jour :

$$u_1 = \frac{1-1}{1-2} = 0 \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{0-1}{0-2} = \frac{1}{2}.$$

La commande Python `u(2)` renvoie 0.5, dont la valeur mathématique est  $1/2$ . Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , la mise à jour s'écrit

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}.$$

Le dénominateur ne s'annule jamais :  $u_0 = 1 \in [0; 1]$ , et si  $0 \leq u_n \leq 1$ , alors

$$u_{n+1} = \frac{1 - u_n}{2 - u_n} \in [0; 1],$$

car  $0 \leq 1 - u_n \leq 2 - u_n$  et  $2 - u_n \geq 1 > 0$ . Par récurrence, tous les termes appartiennent à  $[0; 1]$ . La relation définit donc bien chaque terme de la suite.

### Exercice 41 Une récurrence lue dans un programme

La suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = 2\sqrt{2}$  et la fonction suivante permet de calculer le terme d'indice  $n$  de la suite pour un entier naturel  $n$  donné.

```

1 # Dans l'éditeur Python
2
3 from math import sqrt
4
5 def u(n):
6     u = 2*sqrt(2)
7     for i in range(1,n+1):
8         u = u**2/2 - 4
9     return u

```

1. Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
2. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_6$ .



#### Corrigé

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , la boucle `range(1,n+1)` effectue  $n$  mises à jour. Chaque mise à jour traduit la

relation

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} - 4.$$

Avec la valeur exacte  $u_0 = 2\sqrt{2}$ ,

$$u_1 = \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} - 4 = 0, \quad u_2 = \frac{0^2}{2} - 4 = -4, \quad u_3 = \frac{(-4)^2}{2} - 4 = 4.$$

Puisque  $4^2/2 - 4 = 4$ , tous les termes suivants valent 4. En particulier,

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -4, \quad u_3 = 4, \quad u_6 = 4.$$

Attention aux arrondis Python : `sqrt(2)` est une approximation. Selon la machine, `u(1)` peut afficher un nombre très proche de 0 (par exemple `8.88e-16`) ; la valeur mathématique exacte est 0.

## Thème VII

# Première intuition de la notion de limite

### Exercice 42 [!] Bilan Conjecturer un comportement

Pour chacune des suites suivantes, calculer quelques termes pour de grandes valeurs de  $n$  (ou raisonner directement), puis conjecturer son comportement lorsque  $n$  devient grand.

$$u_n = \frac{1}{n+1}, \quad v_n = n^2, \quad w_n = (-1)^n.$$



#### Corrigé

On conjecture que  $u_n$  se rapproche de 0, que  $v_n$  devient arbitrairement grand, tandis que  $w_n$  alterne entre 1 et  $-1$  et n'a pas de limite.

#### Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 43, page 51.  
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

#### Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 44, page 52.  
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

### Exercice 43 [+] Consolidation Conjecturer une limite à partir de quelques termes

On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$a_n = 3 + \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad b_n = 5 - \frac{2}{n+1}.$$

- Calculer  $a_0$ ,  $a_9$ ,  $a_{99}$ , puis  $b_0$ ,  $b_9$  et  $b_{99}$ .
- Conjecturer la limite de chacune de ces deux suites.



#### Corrigé

$$\begin{aligned} a_0 &= 4, \\ b_0 &= 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_9 &= 3,1, \\ b_9 &= 4,8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{99} &= 3,01, \\ b_{99} &= 4,98. \end{aligned}$$

On conjecture que  $(a_n)$  a pour limite 3 et que  $(b_n)$  a pour limite 5.

**Exercice 44** [\*] **Approfondissement** Une suite récurrente qui semble se stabiliser

On considère la suite  $(c_n)$  définie par

$$c_0 = 0 \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + 3.$$

1. Calculer  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  et  $c_4$ .

**Corrigé**

En appliquant la récurrence à chaque terme précédent,

$$c_1 = \frac{1}{2} \times 0 + 3 = 3, \quad c_2 = \frac{1}{2} \times 3 + 3 = 4,5, \quad c_3 = 5,25, \quad c_4 = 5,625.$$

2. À l'aide de la calculatrice ou d'un programme Python, déterminer  $c_{10}$  à  $10^{-2}$  près.

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , posons  $d_n = 6 - c_n$ . Alors  $d_0 = 6$  et

$$d_{n+1} = 6 - \left( \frac{1}{2}c_n + 3 \right) = \frac{1}{2}(6 - c_n) = \frac{1}{2}d_n.$$

La suite  $(d_n)$  est donc géométrique de premier terme 6 et de raison  $1/2$  : pour tout  $n \geq 0$ ,  $d_n = 6/2^n$  et  $c_n = 6 - 6/2^n$ .  
D'où  $c_{10} = 6 - 6/1024 = 5,994140625 \simeq \boxed{5,99}$ .

3. Conjecturer la limite de  $(c_n)$ , puis vérifier que la valeur conjecturée est solution de l'équation  $L = \frac{1}{2}L + 3$ .

**Corrigé**

Les termes calculés suggèrent la limite 6. La vérification demandée est bien  $6 = \frac{1}{2} \times 6 + 3$  ; l'équation  $L = \frac{1}{2}L + 3$  admet cette seule solution. Cette équation seule ne prouve toutefois pas une convergence. Ici, la formule obtenue à la question précédente permet effectivement de conclure :  $(1/2)^n$  tend vers 0 car  $0 < 1/2 < 1$ . Donc  $c_n = 6 - 6(1/2)^n$  tend vers 6.

## Thème VIII

## Problèmes de synthèse : modélisation, variations et seuils

**Exercice 45** **[!] Bilan Production de bactéries**

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20% en un jour. La société met en place le dispositif industriel suivant. Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus. L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite  $(u_n)$ . On a donc :  $u_0 = 1000$ .

1.

1. a. Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on appelle  $u_n$  la masse, en grammes, des bactéries présentes dans la cuve après  $n$  jours. Initialement,  $u_0 = 1000$  car 1 kg vaut 1000 g.

D'un jour à l'autre, la masse augmente d'abord de 20 %, ce qui la multiplie par  $1 + 20/100 = 1,2$  ; puis on retire 100 g. L'ordre de ces deux opérations est important.

Ainsi, pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} = 1,2u_n - 100, \quad u_0 = 1000.$$

1. b. On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 1000$ .

Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} - u_n = (1,2u_n - 100) - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = 0,2u_n - 100$$

D'après l'hypothèse,  $u_n \geq 1000$ . Comme  $0,2 > 0$ ,

$$\begin{cases} u_n \geq 1000 \\ 0,2 > 0 \end{cases} \implies 0,2u_n \geq 200 \implies u_{n+1} - u_n \geq 100 > 0.$$

Donc  $u_{n+1} > u_n$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$ . Par conséquent,

$$\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}$$

2. On peut également utiliser l'algorithme suivant écrit en langage Python pour répondre au problème de l'entreprise. Recopier et compléter cet algorithme.

**Corrigé**

La variable `u` contient initialement  $u_0 = 1000$  et `n` vaut 0. Tant que  $u_n < 30\,000$  (soit 30 kg), on calcule  $u_{n+1} = 1,2u_n - 100$  et on augmente le rang d'une unité. À la sortie, on renvoie le premier rang où  $u_n \geq 30\,000$ . La boucle finit par s'arrêter : d'après la question précédente, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n \geq 100$  g. Après  $n$  itérations,  $u_n \geq 1000 + 100n$  g, ce qui dépasse 30 000 g pour un rang assez grand.

```

1 def seuil():
2     u = 1000
3     n = 0
4     while u < 30000:
5         u = 1.2*u - 100
6         n = n + 1
7     return n

```

3. À l'aide de la calculatrice, vérifier la réponse au problème de l'entreprise.



### Corrigé

On obtient :

| $n$ | $u_n$       |
|-----|-------------|
| 21  | 23502,55995 |
| 22  | 28103,07195 |
| 23  | 33623,68633 |

Comme  $u_{22} < 30\,000 \leq u_{23}$  et que la suite est strictement croissante, les rangs antérieurs ne conviennent pas : l'objectif est atteint pour la première fois au rang 23, soit après 23 jours.

#### Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 46, page 54.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

#### Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 47, page 55.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

### Exercice 46 [+] Consolidation Culture de levures en bioréacteur

Une entreprise cultive des levures dans un bioréacteur. En milieu nutritif stable, la masse de levures augmente de 18 % par jour. Chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu ; durant cette opération, on perd 150 g de levures. Au départ, on introduit 1,2 kg de levures dans la cuve. On modélise la masse (en grammes) par la suite  $(u_n)$  avec  $u_0 = 1200$ . L'objectif industriel est d'atteindre 20 kg de levures dans la cuve.

1. 1. a. Montrer que, pour tout entier  $n$ , on a :

$$u_{n+1} = 1,18 u_n - 150.$$



### Corrigé

Fixons un entier naturel  $n \geq 0$ . La masse  $u_n$  augmente d'abord de 18 % (multiplication par 1,18), puis diminue de 150 g. La masse au jour suivant vaut donc

$$u_{n+1} = 1,18 u_n - 150.$$

1. b. On admet que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \geq 1000$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.



### Corrigé

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} - u_n = (1,18 u_n - 150) - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = 0,18 u_n - 150$$

On admet que  $u_n \geq 1000$ . On utilise directement cette borne :

$$\begin{cases} u_n \geq 1000 \\ 0,18 > 0 \end{cases} \implies 0,18 u_n \geq 180 \implies u_{n+1} - u_n \geq 30 > 0.$$

Donc  $u_{n+1} > u_n$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$ . Par conséquent,

la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

1. c. Compléter la fonction Python renvoyant le couple  $(n, u)$  quand le seuil 20 kg est atteint.

```
def jours_levures():
    n = ....
    u = .....
    while .....:
        u = .....
        n = .....
    return n, u
```



Corrigé

```
def jours_levures():
    n = 0
    u = 1200.0
    while u < 20000.0:
        u = 1.18*u - 150.0
        n += 1
    return n, u
```

La variable  $u$  contient  $u_n$  lorsque  $n$  vaut  $n$  : les deux variables sont mises à jour une fois par passage dans la boucle. D'après la question précédente,  $u_{n+1} - u_n \geq 30$  g pour tout entier naturel  $n$ . Ainsi  $u_n \geq 1200 + 30n$  : le seuil sera atteint et la boucle s'arrêtera.

2. Déterminer (par calcul ou au script) le plus petit  $n$  tel que  $u_n \geq 20000$ . Donner aussi une valeur approchée de  $u_n$  à ce rang.



Corrigé

On utilise une calculatrice ou le programme précédent pour itérer la récurrence

$$u_{n+1} = 1,18 u_n - 150 \quad \text{avec} \quad u_0 = 1200,$$

et on remplit un tableau de valeurs jusqu'à dépasser 20000 g.

| $n$          | 20       | 21       | 22       | 23       | 24       |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $u_n$ (en g) | 10877,45 | 12685,39 | 14818,76 | 17336,13 | 20306,64 |

On observe que  $u_{23} \approx 17336,13 < 20000$  et  $u_{24} \approx 20306,64 \geq 20000$ .

Or, d'après la question 1.b, la suite  $(u_n)$  est **strictement croissante**. Ainsi, dès que le seuil est franchi, il le reste ensuite ; le plus petit rang satisfaisant  $u_n \geq 20000$  est donc le premier où l'inégalité est vraie.

$n_{\min} = 24$

et

$u_{24} \approx 20306,64 \text{ g} \approx 20,31 \text{ kg.}$

## Exercice 47 [\*] Approfondissement Gestion d'un capital financier

Un investisseur place un capital initial de 6000 euro sur un compte rémunéré. Chaque mois :

- le capital augmente de 2 % ;
- puis l'investisseur retire 100 euro.

On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 6000$ , où  $u_n$  représente le capital (en euros) au début du  $n$ -ième mois.

1. Montrer que, pour tout entier  $n$ , on a :

$$u_{n+1} = 1,02 u_n - 100.$$



## Corrigé

Fixons un entier naturel  $n \geq 0$ . L'augmentation de 2% multiplie le capital  $u_n$  par 1,02; on retire ensuite 100 euros. Le mois suivant, on a donc

$$u_{n+1} = 1,02 u_n - 100.$$

2. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

## Corrigé

$$u_1 = 1,02 \times 6000 - 100 = 6120 - 100 = 6020, \quad u_2 = 1,02 \times 6020 - 100 = 6140,4 - 100 = 6040,4.$$

3. (Variation) On admet que, pour tout entier  $n$ , on a  $u_n \geq 5000$ . En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

## Corrigé

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (1,02u_n - 100) - u_n \\ &= 0,02u_n - 100 \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n = 0,02(u_n - 5000)$$

L'hypothèse donnée  $u_n \geq 5000$  permet déjà de conclure que  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ . Pour obtenir une inégalité stricte, vérifions qu'aucun terme ne vaut 5000 :

$$u_{n+1} - 5000 = 1,02(u_n - 5000).$$

On a  $u_0 - 5000 = 1000 > 0$ ; si  $u_n - 5000 > 0$ , le facteur  $1,02 > 0$  entraîne  $u_{n+1} - 5000 > 0$ . Par récurrence, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 5000$ . Ainsi, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{0,02}_{>0} \underbrace{(u_n - 5000)}_{>0} > 0.$$

La suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

## 4. Point fixe et interprétation.

- Résoudre  $u = 1,02u - 100$  et donner le point fixe  $L$ .
- Interpréter ce nombre  $L$  pour la dynamique de  $(u_n)$ .



## Corrigé

$$u = 1,02u - 100 \iff -0,02u = -100 \iff u = \frac{100}{0,02} = 5000.$$

$$L = 5000.$$

Interprétation : si le capital était exactement 5000 euro avant l'opération mensuelle, il resterait 5000 euro le mois suivant (équilibre). Pour tout entier naturel  $n$ , posons  $d_n = u_n - 5000$ . On sait que  $d_0 = 1000$  et, d'après le calcul précédent,  $d_{n+1} = 1,02d_n$  pour tout  $n \geq 0$ . La suite  $(d_n)$  est donc géométrique de raison 1,02 :  $d_n = 1000(1,02)^n$  et  $u_n = 5000 + 1000(1,02)^n$ . Comme  $1,02 > 1$ , ce modèle prévoit que le capital augmente sans borne; 5000 reste un point d'équilibre, qui n'est jamais atteint ici.

5. Programme Python. Écrire une fonction  $u(n)$  qui calcule  $u_n$  par itérations successives.

**Corrigé**

```
def u(n):
    val = 6000.0
    for k in range(n):
        val = 1.02*val - 100.0
    return val
```

6. **Liste des termes.** Écrire une fonction `termes_u(n)` qui renvoie  $[u_0, \dots, u_n]$ .

**Corrigé**

```
def termes_u(n):
    L = [6000.0]
    for k in range(n):
        L.append(1.02*L[-1] - 100.0)
    return L
```

7. **Seuil.** Écrire une fonction `seuil(M)` qui renvoie le plus petit rang  $n$  tel que  $u_n \geq M$ .

**Corrigé**

```
def seuil(M):
    n = 0
    val = 6000.0
    while val < M:
        val = 1.02*val - 100.0
        n += 1
    return n
```

Pour  $M \leq 6000$ , le résultat est 0 sans passage dans la boucle. Pour  $M > 6000$ , la formule  $u_n = 5000 + 1000(1,02)^n$  montre que le seuil est atteint ; la croissance stricte et la condition `val < M` garantissent que le rang renvoyé est bien le premier.

8. **Tableau de valeurs (calculatrice ou script).** Compléter :

| $n$             | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|-----------------|----|----|----|----|----|
| $u_n$ (en euro) |    |    |    |    |    |

**Corrigé**

Avec  $u_n = 5000 + 1000(1,02)^n$ , les valeurs arrondies à l'euro sont :

| $n$           | 10   | 20   | 30   | 40   | 50   |
|---------------|------|------|------|------|------|
| $u_n$ (euros) | 6219 | 6486 | 6811 | 7208 | 7692 |

Le calcul des rangs doit être fait avant l'arrondi des résultats.

9. **Atteindre un objectif.** Déterminer le plus petit  $n$  tel que  $u_n \geq 20000$ . Donner aussi une valeur approchée de  $u_n$  à ce rang (calculatrice ou script).

**Corrigé**

Par itérations (ou à l'aide de la fonction `seuil`),

$$u_{136} \approx 19\,778,26 < 20\,000 \quad \text{et} \quad u_{137} \approx 20\,073,83 \geq 20\,000.$$

La suite étant strictement croissante, aucun rang inférieur à 137 ne convient. Le premier rang demandé est donc

|                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------|
| $n_{\min} = 137, \quad u_{137} \approx 20\,073,83 \text{ euros.}$ |
|-------------------------------------------------------------------|

## Thème IX

## Bilan - Pour Préparer le Test

## Exercice 48 [!] Bilan

Les trois parties sont indépendantes.

## Partie A – Étude d'une suite explicite

On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$u_n = \frac{2n+1}{n+3}.$$

1. Calculer  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_5$ .



## Corrigé

En utilisant l'expression de  $u_n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{3}, \\ u_1 &= \frac{3}{4}, \\ u_5 &= \frac{11}{8}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_0 = \frac{1}{3}, \quad u_1 = \frac{3}{4}, \quad u_5 = \frac{11}{8}.$$

- 2.

2. a. Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$ .



## Corrigé

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+3} \\ &= \frac{2n+2+1}{n+4} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = \frac{2n+3}{n+4}$$

2. b. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+3)(n+4)}.$$



## Corrigé

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , les nombres  $n+3$  et  $n+4$  sont strictement positifs; les quotients sont donc définis.

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} \\ &= \frac{(2n+3)(n+3) - (2n+1)(n+4)}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{2n^2 + 9n + 9 - (2n^2 + 9n + 4)}{(n+3)(n+4)} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+3)(n+4)}$$

2. c. En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .



Corrigé

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$\begin{cases} 5 > 0 \\ n+3 \geq 3 > 0 \\ n+4 \geq 4 > 0 \end{cases} \implies u_{n+1} - u_n > 0.$$

Donc  $u_{n+1} > u_n$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$ . Par conséquent,

la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est majorée par 2.



Corrigé

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on étudie la différence  $2 - u_n$  :

$$\begin{aligned} 2 - u_n &= 2 - \frac{2n+1}{n+3} \\ &= \frac{2(n+3) - (2n+1)}{n+3} \\ &= \frac{2n+6-2n-1}{n+3} \end{aligned}$$

$$2 - u_n = \frac{5}{n+3}$$

Or, pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$\begin{cases} 5 > 0 \\ n+3 \geq 3 > 0 \end{cases} \implies 2 - u_n > 0.$$

Ainsi  $u_n < 2$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$ .

Par conséquent,

la suite  $(u_n)$  est majorée par 2.

## Partie B – Une suite quadratique

On considère la suite  $(t_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$t_n = n^2 - 8n + 5.$$

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$t_{n+1} - t_n = 2n - 7.$$

**Corrigé**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= (n+1)^2 - 8(n+1) + 5 - (n^2 - 8n + 5) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 8n - 8 + 5 - n^2 + 8n - 5 \end{aligned}$$

$$\boxed{t_{n+1} - t_n = 2n - 7}$$

2. En déduire le sens de variation de la suite  $(t_n)$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , d'après la question précédente,

$$t_{n+1} - t_n = 2n - 7.$$

Comme  $n$  est entier, on distingue les rangs autorisés :

$$\begin{cases} 0 \leq n \leq 3 \implies 2n - 7 \leq -1 < 0 \\ n \geq 4 \implies 2n - 7 \geq 1 > 0 \end{cases}.$$

Ainsi  $t_{n+1} < t_n$  pour  $n = 0, 1, 2, 3$ , donc  $t_0 > t_1 > t_2 > t_3 > t_4$ ; puis  $t_{n+1} > t_n$  pour tout entier  $n \geq 4$ .

$$\boxed{\begin{array}{l} (t_n) \text{ est strictement décroissante de } t_0 \text{ à } t_4, \\ (t_n) \text{ est strictement croissante à partir du rang 4.} \end{array}}$$

3. Déterminer la valeur minimale prise par la suite  $(t_n)$ .

**Corrigé**

D'après l'étude précédente, le minimum est atteint au rang 4.

Or

$$\begin{aligned} t_4 &= 4^2 - 8 \times 4 + 5 \\ &= 16 - 32 + 5 \\ &= -11. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\min_{n \in \mathbb{N}} t_n = t_4 = -11}.$$

**Partie C – Une suite au comportement différent**

On considère la suite  $(a_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite  $(a_n)$ .

**Corrigé**

On obtient :

$$\begin{array}{lll} a_0 = 1, & a_1 = -\frac{1}{2}, & a_2 = \frac{1}{3}, \\ a_3 = -\frac{1}{4}, & a_4 = \frac{1}{5}, & a_5 = -\frac{1}{6}. \end{array}$$

2. La suite  $(a_n)$  est-elle croissante ? décroissante ? Justifier.



**Corrigé**

On a

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$a_1 < a_0 \quad \text{mais} \quad a_2 > a_1.$$

La suite n'est donc ni croissante ni décroissante.

La suite  $(a_n)$  n'est pas monotone.

3. Représenter dans un repère les points de coordonnées

$$(n; a_n)$$

pour  $0 \leq n \leq 5$ .

Décrire le comportement que l'on observe.

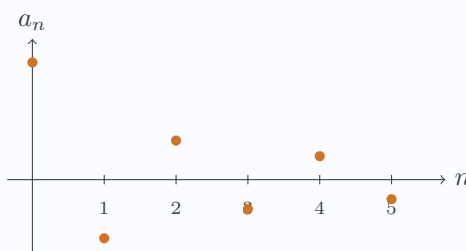


**Corrigé**

Les six points à placer sont

$$(0; 1), \quad (1; -1/2), \quad (2; 1/3), \quad (3; -1/4), \quad (4; 1/5), \quad (5; -1/6).$$

Ils sont isolés : on ne les relie pas par une courbe.



Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,  $(-1)^n$  vaut 1 si  $n$  est pair et  $-1$  s'il est impair : les points alternent de part et d'autre de l'axe des abscisses. De plus, leur valeur absolue  $|a_n| = 1/(n+1)$  diminue quand  $n$  augmente. Les points semblent se rapprocher de l'axe.

4. Conjecturer la limite de la suite  $(a_n)$ .



**Corrigé**

D'après les valeurs calculées et la représentation graphique, les termes semblent se rapprocher de 0.

On conjecture donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

## Partie D– Une suite définie de deux façons et Python

On considère la suite  $(v_n)$  définie par

$$v_0 = 25 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 0,8v_n + 12 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ .

**Corrigé**

La suite étant définie par récurrence, on calcule successivement :

$$\begin{aligned}v_1 &= 0,8v_0 + 12 \\&= 0,8 \times 25 + 12 \\&= 32, \\v_2 &= 0,8v_1 + 12 \\&= 0,8 \times 32 + 12 \\&= 37,6, \\v_3 &= 0,8v_2 + 12 \\&= 0,8 \times 37,6 + 12 \\&= 42,08.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$v_1 = 32, \quad v_2 = 37,6, \quad v_3 = 42,08.$$

2. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_n < 60.$$

Étudier le sens de variation de la suite  $(v_n)$ .

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= (0,8v_n + 12) - v_n \\&= 12 - 0,2v_n\end{aligned}$$

$$v_{n+1} - v_n = 0,2(60 - v_n)$$

Par hypothèse,  $v_n < 60$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$ . Ainsi,

$$\begin{cases} 0,2 > 0 \\ 60 - v_n > 0 \end{cases} \implies v_{n+1} - v_n > 0.$$

Donc  $v_{n+1} > v_n$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$ . Par conséquent,

$$\text{la suite } (v_n) \text{ est strictement croissante.}$$

3. On admet désormais que la suite  $(v_n)$  peut aussi s'écrire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_n = 60 - 35 \times 0,8^n.$$

3. a. Retrouver  $v_0$ ,  $v_1$  et  $v_2$  à l'aide de cette expression.

3. b. Retrouver le sens de variation de  $(v_n)$  en utilisant cette fois l'expression explicite.

**Corrigé**

3. a.

$$\begin{aligned}v_0 &= 60 - 35 \times 0,8^0 = 25, \\v_1 &= 60 - 35 \times 0,8 = 32, \\v_2 &= 60 - 35 \times 0,8^2 = 37,6.\end{aligned}$$

On retrouve bien les valeurs obtenues avec la relation de récurrence.

3. b. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 60 - 35 \times 0,8^{n+1} - (60 - 35 \times 0,8^n) \\ &= 35 \times 0,8^n - 35 \times 0,8^{n+1} \\ &= 35 \times 0,8^n (1 - 0,8) \end{aligned}$$

$$v_{n+1} - v_n = 7 \times 0,8^n$$

Or

$$0,8^n > 0$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n > 0.$$

On retrouve donc

la suite  $(v_n)$  est strictement croissante.

4. On souhaite calculer un terme de la suite à l'aide de Python.

Compléter la fonction suivante afin que `terme(n)` renvoie  $v_n$ .

```
1 def terme(n):
2     v = 25
3     for k in range(n):
4         v = 0.8*v + 12
5     return v
```



### Corrigé

On initialise la variable `v` avec

$$v_0 = 25.$$

Pour passer d'un terme au suivant, on utilise la relation

$$v_{n+1} = 0,8v_n + 12.$$

La boucle doit être exécutée  $n$  fois pour passer de  $v_0$  à  $v_n$ .

L'algorithme complété est donc celui donné ci-dessus.

5. Que renvoie l'instruction

`terme(3)` ?



### Corrigé

La fonction `terme(n)` renvoie le terme  $v_n$ .

Or

$$v_3 = 42,08.$$

Ainsi,

$$\text{terme}(3) = 42,08.$$

6. Compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie la liste

$$[v_0, v_1, \dots, v_N].$$

```

1 def liste_termes(N):
2     v = 25
3     L = [v]
4     for k in range(N):
5         v = 0.8*v + 12
6         L.append(v)
7     return L

```



### Corrigé

La liste contient déjà  $v_0$ .

Pour obtenir ensuite

$$v_1, v_2, \dots, v_N,$$

il faut effectuer  $N$  passages dans la boucle.

À chaque étape, on calcule le terme suivant puis on l'ajoute à la liste.

L'algorithme complété est donc celui donné ci-dessus.

7. On cherche maintenant le premier terme de la suite supérieur ou égal à une valeur donnée  $A$ , avec

$$25 < A < 60.$$

Compléter la fonction de seuil suivante.

```

1 def seuil(A):
2     v = 25
3     n = 0
4     while v < A:
5         v = 0.8*v + 12
6         n = n + 1
7     return n

```



### Corrigé

On initialise

$$n = 0 \quad \text{et} \quad v = v_0 = 25.$$

On cherche le premier rang pour lequel

$$v_n \geq A.$$

La boucle doit donc continuer tant que

$$v < A.$$

À chaque passage, on calcule le terme suivant et on augmente le rang de 1.

La boucle termine pour le seuil  $A$  demandé : pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = 60 - 35(0,8)^n$  et  $(0,8)^n$  tend vers 0. Puisque  $A < 60$ , il existe donc un rang auquel  $v_n \geq A$ . L'algorithme complété est celui donné ci-dessus.

8.

8. a. Expliquer précisément ce que renvoie la fonction `seuil(A)`.  
 8. b. Déterminer la valeur renvoyée par `seuil(50)` et vérifier le résultat en donnant les deux termes consécutifs utiles.



### Corrigé

8. a. Pour un réel  $A$  tel que  $25 < A < 60$ , la formule explicite montre que le seuil est atteint et que la boucle s'arrête. Après chaque passage, les variables `n` et `v` contiennent respectivement le rang  $n$  et le terme  $v_n$ . Comme la suite est strictement croissante, la fonction `seuil(A)` renvoie

$$\boxed{\text{le plus petit entier } n \text{ tel que } v_n \geq A}.$$

8. b. On calcule :

$$v_4 = 45,664,$$

$$v_5 = 48,5312,$$

$$v_6 = 50,82496.$$

Ainsi,

$$v_5 < 50 \leq v_6.$$

Le premier terme supérieur ou égal à 50 est donc  $v_6$ .

Par conséquent,

$$\boxed{\text{seuil}(50) = 6}.$$

## Thème X

## Automatismes du chapitre – Pour préparer le test

## Exercice 49 [FLASH] Automatismes QCM – Bac Première 2026

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

## Question 1

Source bac : Première spécialité, Asie 2026 – exercice 1, partie A, question 1 – question adaptée

En 2020, le niveau d'un lac est de 1100 mètres. On estime qu'il baisse de 1 % chaque année. On note  $u_n$  son niveau, en mètres,  $n$  années après 2020.

La valeur de  $u_1$  est :

- |         |         |
|---------|---------|
| a) 1089 | c) 1111 |
| b) 1099 | d) 990  |



## Corrigé

Une baisse de 1 % correspond au coefficient multiplicateur 0,99.

$$u_1 = 1100 \times 0,99 = 1089.$$

Réponse a)

## Question 2

Source bac : Première spécialité, Asie 2026 – exercice 1, partie A, question 2.a – question adaptée

Avec les mêmes notations, quelle relation traduit correctement l'évolution annuelle du niveau du lac ?

- |                           |                         |
|---------------------------|-------------------------|
| a) $u_{n+1} = u_n - 0,01$ | c) $u_{n+1} = 1,01u_n$  |
| b) $u_{n+1} = 0,99u_n$    | d) $u_{n+1} = u_n - 11$ |



## Corrigé

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , la baisse annuelle de 1 % multiplie le niveau  $u_n$  par  $1 - 0,01 = 0,99$ . Ainsi,

$$u_{n+1} = 0,99u_n.$$

Réponse b)

**Question 3**

Source bac : Première spécialité, sujet zéro 2 – exercice 1, question 1 – question adaptée

On considère la suite définie par

$$u_0 = 10\,000, \quad u_{n+1} = 1,08u_n - 300.$$

La valeur de  $u_1$  est :

- |           |           |
|-----------|-----------|
| a) 10 800 | c) 10 080 |
| b) 10 500 | d) 9 700  |

**Corrigé**

$$\begin{aligned} u_1 &= 1,08u_0 - 300 \\ &= 1,08 \times 10\,000 - 300 \\ &= 10\,500. \end{aligned}$$

Réponse b)

**Question 4**

Source bac : Première spécialité, Centres étrangers 2026 – exercice 1, partie A – question adaptée

La hauteur d'un arbre est modélisée par une suite  $(u_n)$  telle que  $u_0 = 1$  et que l'arbre grandit de 0,4 mètre chaque année. Quelle relation de récurrence convient ?

- |                       |                          |
|-----------------------|--------------------------|
| a) $u_{n+1} = 0,4u_n$ | c) $u_{n+1} = u_n + 0,4$ |
| b) $u_{n+1} = 1,4u_n$ | d) $u_{n+1} = u_n + 1,4$ |

**Corrigé**

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , une croissance de 0,4 mètre signifie que l'on ajoute 0,4 à la hauteur  $u_n$  :

$$u_{n+1} = u_n + 0,4.$$

Réponse c)

**Question 5**

Source bac : Première spécialité, Métropole 2026 – exercice 3, affirmation 2 – question adaptée

On considère la suite définie par

$$u_n = 2^{-n}.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  est égal à :

- |                  |                   |
|------------------|-------------------|
| a) 2             | c) -2             |
| b) $\frac{1}{2}$ | d) $-\frac{1}{2}$ |

**Corrigé**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{-(n+1)}}{2^{-n}} \\ &= 2^{-1} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Réponse b)

**Question 6**

Source bac : Première spécialité, Polynésie 2026 – exercice 1, partie B, question 3.a – question adaptée

On utilise le programme suivant pour déterminer le premier rang  $n$  tel que  $u_n \geq k$  :

```
u = 400
n = 0
while .....:
    n = n + 1
    u = 1.025*u
```

Quelle condition faut-il écrire dans la boucle **while** ?

- |               |            |
|---------------|------------|
| a) $u < k$    | c) $u > k$ |
| b) $u \leq k$ | d) $n < k$ |

**Corrigé**

La boucle doit se poursuivre tant que le seuil n'est pas atteint, c'est-à-dire tant que  $u < k$ .

Réponse a)

## Thème XI

## Extraits du Bac 2026



## Épreuve du baccalauréat

À l'épreuve anticipée de mathématiques de Première, la calculatrice n'est pas autorisée.

**Exercice 50 [BAC] D'après Bac 2026 Niveau d'un lac – Asie 2026**

Source bac : Première spécialité, Asie, 15 juin 2026 – exercice 1, partie A – questions adaptées

En 2020, le niveau d'un lac est de 1100 mètres. On estime qu'il baisse de 1 % chaque année. On note  $u_n$  son niveau  $n$  années après 2020 et  $u_0 = 1100$ .

1. Calculer  $u_1$  et interpréter le résultat.



## Corrigé

Une baisse de 1 % correspond au coefficient multiplicateur 0,99 :

$$u_1 = 1100 \times 0,99 = 1089 \text{ m}.$$

Le modèle prévoit donc un niveau de 1089 m en 2021.

2. Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .



## Corrigé

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = 0,99u_n.$$

3. Écrire le calcul permettant d'estimer le niveau du lac en 2023, sans effectuer le calcul.



## Corrigé

L'année 2023 correspond au rang 3. Le calcul demandé est donc

$$1100 \times 0,99^3.$$

4. Compléter le programme qui affiche le nombre d'années à partir duquel le niveau devient inférieur à 1020 mètres.

```
u = 1100
n = 0
while .....:
    n = n + 1
    u = .....
print(n)
```



## Corrigé

Le programme doit continuer tant que le niveau reste supérieur ou égal à 1020 m : on complète par  $u \geq 1020$  puis  $u = 0.99*u$ .

**Exercice 51 [BAC] D'après Bac 2026 Population d'une ville – sujet zéro 2**

Source bac : Première spécialité, sujet zéro 2 – exercice 1 – questions adaptées

On modélise une population par

$$u_0 = 10\,000, \quad u_{n+1} = 1,08u_n - 300.$$

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

**Corrigé**

$$u_1 = 1,08 \times 10\,000 - 300 = 10\,500,$$

$$u_2 = 1,08 \times 10\,500 - 300 = 11\,040.$$

Ainsi,

$$u_1 = 10\,500 \quad \text{et} \quad u_2 = 11\,040.$$

2. Expliquer en une phrase le rôle des nombres 1,08 et 300 dans ce modèle.

**Corrigé**

Le coefficient 1,08 correspond à une augmentation de 8 %, puis le terme  $-300$  modélise le retrait de 300 habitants.

3. Compléter une fonction Python qui renvoie les  $n + 1$  premiers termes de la suite.

**Corrigé**

On place d'abord  $u_0$  dans la liste, puis on calcule et ajoute un nouveau terme à chacune des  $n$  itérations :

```
def termes(n):  
    u = 10000  
    L = [u]  
    for k in range(n):  
        u = 1.08*u - 300  
        L.append(u)  
    return L
```

La liste initiale compte un élément et chacun des  $n$  passages en ajoute un : elle contient bien  $u_0, \dots, u_n$ .

**Exercice 52 [BAC] D'après Bac 2026 Seuil en Python – Polynésie 2026**

Source bac : Première spécialité, Polynésie, 12 juin 2026 – exercice 1, partie B – questions adaptées

En 2025, un club accueille 400 clients. On modélise le nombre de clients par une suite  $(u_n)$  vérifiant

$$u_0 = 400, \quad u_{n+1} = 1,025u_n.$$

On souhaite déterminer le premier rang pour lequel  $u_n \geq k$ .

1. Compléter la fonction Python suivante.

```
def seuil(k):  
    u = 400  
    n = 0  
    while .....:  
        n = .....  
        u = .....  
    return .....
```

**Corrigé**

Pour obtenir le plus petit rang tel que  $u_n \geq k$ , la boucle doit continuer tant que  $u < k$ . On complète par

|                                              |
|----------------------------------------------|
| $u < k, \quad n + 1, \quad 1.025*u, \quad n$ |
|----------------------------------------------|

2. Expliquer ce que renvoie `seuil(600)` dans le contexte de l'exercice.

**Corrigé**

`seuil(600)` renvoie le plus petit entier  $n$  pour lequel le modèle prévoit au moins 600 clients, c'est-à-dire le nombre d'années après 2025 nécessaire pour atteindre ce seuil.

## Thème XII

## Now We Can Talk : pour aller plus loin

**Exercice 53** ★ **Fibonacci – From rabbits to a sequence**

Au XIII<sup>e</sup> siècle, Fibonacci étudie un problème de reproduction de lapins. On considère ici le modèle simplifié suivant :

- au début du premier mois, on dispose d'un couple de jeunes lapins ;
- un couple devient adulte au bout d'un mois ;
- à partir du mois suivant, chaque couple adulte engendre chaque mois un nouveau couple ;
- aucun lapin ne meurt.

On note  $F_n$  le nombre de couples de lapins présents au début du  $n$ -ième mois.

On prend

$$F_1 = 1 \quad \text{et} \quad F_2 = 1.$$

1. Expliquer pourquoi

$$F_3 = 2 \quad \text{et} \quad F_4 = 3.$$

**Corrigé**

Au début du troisième mois, le couple initial est devenu adulte et engendre un nouveau couple. On a donc

$$F_3 = 2.$$

Au début du quatrième mois :

- les deux couples présents au mois précédent sont toujours présents ;
- seul le couple le plus ancien est alors en mesure d'engendrer un nouveau couple.

Ainsi,

$$F_4 = 2 + 1 = 3.$$

Donc

$$F_3 = 2 \quad \text{et} \quad F_4 = 3.$$

2. Calculer  $F_5$ ,  $F_6$ ,  $F_7$  et  $F_8$ .

Que semble-t-on devoir additionner pour obtenir chaque nouveau terme ?

**Corrigé**

On obtient successivement :

$$F_5 = 3 + 2 = 5,$$

$$F_6 = 5 + 3 = 8,$$

$$F_7 = 8 + 5 = 13,$$

$$F_8 = 13 + 8 = 21.$$

Les premiers termes sont donc

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21.$$

Chaque terme semble être obtenu en additionnant les deux termes précédents.

3. Traduire cette observation par une relation de récurrence.

**Corrigé**

Pour obtenir le nombre de couples présents au mois  $n + 2$  :

- les  $F_{n+1}$  couples déjà présents au mois précédent restent présents ;
- les couples capables de se reproduire correspondent aux  $F_n$  couples présents deux mois auparavant.

On obtient donc

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Cette relation est valable pour tout entier  $n \geq 1$ .

4. Pour  $N \geq 2$ , compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la liste des  $N$  premiers termes de la suite de Fibonacci.

```

1 def fibonacci(N):
2     a = 1
3     b = 1
4     L = [a, b]
5     for k in range(N-2):
6         c = a + b
7         L.append(c)
8         a = b
9         b = c
10    return L

```

**Corrigé**

Les variables **a** et **b** contiennent deux termes consécutifs.

Le terme suivant est donc

$$c = a + b.$$

Une fois ce terme calculé, on décale les deux valeurs :

$$a \leftarrow b \quad \text{puis} \quad b \leftarrow c.$$

Comme les deux premiers termes sont déjà placés dans la liste, il reste à calculer  $N - 2$  termes. L'algorithme complété est celui donné ci-dessus.

5. Que renvoie l'instruction

`fibonacci(10) ?`

**Corrigé**

En poursuivant la relation

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

on obtient

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

Ainsi,

$$\text{fibonacci}(10) = [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55].$$

**Exercice 54** ★★ **Syracuse – A sequence with a mystery**

On choisit un entier naturel non nul  $u_0$ .

On construit ensuite une suite  $(u_n)$  de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Cette suite est appelée **suite de Syracuse**.

1. On choisit

$$u_0 = 10.$$

Calculer les termes successifs jusqu'à obtenir pour la première fois la valeur 1.

**Corrigé**

On applique successivement la règle définissant la suite :

$$u_0 = 10,$$

$$u_1 = 5,$$

$$u_2 = 16,$$

$$u_3 = 8,$$

$$u_4 = 4,$$

$$u_5 = 2,$$

$$u_6 = 1.$$

Ainsi, la trajectoire issue de 10 est

$$10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

2. La suite obtenue à partir de  $u_0 = 10$  est-elle monotone ?

Justifier avec deux comparaisons seulement.

**Corrigé**

On a

$$u_1 = 5 < u_0 = 10,$$

mais

$$u_2 = 16 > u_1 = 5.$$

La suite commence donc par décroître puis augmenter.

Par conséquent,

$$\text{la suite n'est pas monotone.}$$

3. On appelle **temps de vol** le plus petit entier  $n$  tel que

$$u_n = 1.$$

Quel est le temps de vol de la suite issue de 10 ?

**Corrigé**

D'après les valeurs précédentes,

$$u_6 = 1$$

et aucun des termes

$$u_0, u_1, \dots, u_5$$

n'est égal à 1.

Le temps de vol est donc

**6.**

4. Compléter la fonction suivante, qui renvoie la trajectoire de Syracuse d'un entier  $a$ , jusqu'à l'obtention de 1.

```

1  def syracuse(a):
2      u = a
3      L = [u]
4      while u != 1:
5          if u % 2 == 0:
6              u = u // 2
7          else:
8              u = 3*u + 1
9          L.append(u)
10     return L

```



### Corrigé

La condition

$$u \% 2 == 0$$

signifie que  $u$  est pair.

Dans ce cas, on remplace  $u$  par

$$\frac{u}{2}.$$

Sinon  $u$  est impair et on le remplace par

$$3u + 1.$$

La boucle doit continuer tant que la valeur 1 n'a pas été atteinte, d'où la condition

$$u \neq 1.$$

L'algorithme complété est donc celui donné ci-dessus. Il termine pour les valeurs initiales dont la trajectoire atteint effectivement 1. Sa terminaison pour tous les entiers initiaux positifs n'est pas démontrée : c'est précisément l'objet de la conjecture.

5. Écrire une fonction `temps_vol(a)` qui renvoie uniquement le temps de vol de la trajectoire issue de  $a$ .

```

1  def temps_vol(a):
2      u = a
3      n = 0
4      while u != 1:
5          if u % 2 == 0:
6              u = u // 2
7          else:
8              u = 3*u + 1
9          n = n + 1
10     return n

```



### Corrigé

La variable  $n$  compte le nombre de transformations effectuées.

Elle est initialisée à 0 et augmente de 1 à chaque calcul d'un nouveau terme.

Lorsque la valeur 1 est atteinte,  $n$  est donc exactement le temps de vol.

6. Tester mentalement ou à l'aide de Python plusieurs valeurs initiales.

Quelle conjecture célèbre ces expériences suggèrent-elles ?

*Attention : une conjecture n'est pas un théorème.*

**Corrigé**

Les expériences numériques suggèrent que, quelle que soit la valeur initiale entière strictement positive choisie, la trajectoire finit toujours par atteindre 1.

C'est la **conjecture de Syracuse** :

Toute trajectoire issue d'un entier strictement positif atteint 1.

Cette affirmation a été vérifiée pour un très grand nombre de valeurs initiales, mais elle n'est pas démontrée dans le cas général.

**Exercice 55** ★★ ★ **The Tower of Hanoi – Can you beat the puzzle ?**

Le jeu des *tours de Hanoï* comporte trois tiges et  $n$  disques de diamètres différents.

Au départ, les disques sont empilés sur la première tige, du plus grand au plus petit.

On souhaite transférer toute la tour sur la troisième tige en respectant les règles suivantes :

- on ne déplace qu'un seul disque à la fois ;
- on ne pose jamais un disque sur un disque plus petit.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $u_n$  le nombre minimal de déplacements nécessaires pour déplacer une tour de  $n$  disques.

1. Déterminer  $u_1$ ,  $u_2$  puis  $u_3$ .

**Corrigé**

Pour un seul disque, un déplacement suffit :

$$u_1 = 1.$$

Pour deux disques :

- on déplace le petit disque ;
- on déplace le grand disque ;
- on replace le petit disque sur le grand.

Donc

$$u_2 = 3.$$

Pour trois disques :

- déplacer les deux petits disques nécessite au minimum  $u_2 = 3$  déplacements ;
- déplacer le plus grand disque nécessite 1 déplacement ;
- remplacer les deux petits disques nécessite encore 3 déplacements.

Ainsi,

$$u_3 = 3 + 1 + 3 = 7.$$

Finalement,

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 7.$$

2. On considère une tour de  $n + 1$  disques.

Expliquer pourquoi tout déplacement de cette tour impose successivement :

- de déplacer les  $n$  petits disques ;
- de déplacer le plus grand disque ;
- de replacer les  $n$  petits disques.

En déduire que

$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

**Corrigé**

Fixons un entier  $n \geq 1$ . Le plus grand disque de la tour de  $n + 1$  disques est initialement situé sous les  $n$  autres. Pour pouvoir le déplacer, il est donc nécessaire de déplacer auparavant les  $n$  petits disques sur la tige intermédiaire. Cette première étape nécessite au minimum

$$u_n$$

déplacements.

On peut alors déplacer le plus grand disque, ce qui nécessite un déplacement.

Enfin, il faut transférer les  $n$  petits disques sur le plus grand : cela nécessite à nouveau au minimum

$$u_n$$

déplacements.

Ces trois étapes donnent au moins  $2u_n + 1$  déplacements ; en effectuant chaque transfert de  $n$  disques de façon

optimale, on réalise exactement ce nombre. Ainsi,

$$u_{n+1} = u_n + 1 + u_n$$

$$\boxed{u_{n+1} = 2u_n + 1}$$

3. À l'aide de cette relation, calculer  $u_4$ ,  $u_5$  et  $u_6$ .

Conjecturer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .



### Corrigé

On calcule successivement :

$$u_4 = 2u_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15,$$

$$u_5 = 2u_4 + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31,$$

$$u_6 = 2u_5 + 1 = 2 \times 31 + 1 = 63.$$

Ainsi,

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 15, \quad 31, \quad 63.$$

On remarque que

$$1 = 2^1 - 1, \quad 3 = 2^2 - 1, \quad 7 = 2^3 - 1, \quad 15 = 2^4 - 1.$$

On conjecture donc, pour chaque entier  $n \geq 1$ ,

$$\boxed{u_n = 2^n - 1}.$$

Il s'agit à ce stade d'une conjecture obtenue à partir des premiers termes.

4. On considère la suite  $(v_n)$  définie par

$$v_n = 2^n - 1.$$

Vérifier que

$$v_1 = u_1$$

et que la suite  $(v_n)$  satisfait également

$$v_{n+1} = 2v_n + 1.$$

Que peut-on en conclure à ce stade ?



### Corrigé

On a

$$v_1 = 2^1 - 1 = 1 = u_1.$$

De plus, pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2^{n+1} - 1 \\ &= 2 \times 2^n - 1 \\ &= 2(2^n - 1) + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{v_{n+1} = 2v_n + 1}$$

Les deux suites ont le même premier terme et obéissent à la même règle. Elles ont donc le même deuxième terme, puis le même troisième, et ainsi de suite. Comme chaque terme est déterminé par le précédent, on en conclut, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\boxed{u_n = v_n = 2^n - 1.}$$

5. Pour la suite de l'exercice, on utilise la formule

$$u_n = 2^n - 1.$$

Compléter la fonction suivante afin qu'elle calcule  $u_n$  à partir de la relation de récurrence.

```

1 def hanoi(n):
2     u = 1
3     for k in range(n-1):
4         u = 2*u + 1
5     return u

```



## Corrigé

On initialise avec

$$u = u_1 = 1.$$

Pour obtenir  $u_n$  à partir de  $u_1$ , il faut calculer successivement

$$u_2, u_3, \dots, u_n,$$

soit  $n - 1$  nouveaux termes.

À chaque étape, on utilise

$$u_{k+1} = 2u_k + 1.$$

L'algorithme complété est donc celui donné ci-dessus.

6. Un joueur réussit à effectuer exactement deux déplacements par seconde, sans jamais commettre d'erreur.

6. a. Estimer le temps minimal nécessaire pour résoudre une tour de 20 disques.

6. b. Estimer, en années, le temps nécessaire pour une tour de 40 disques.

On prendra

$$1 \text{ année} = 365 \text{ jours.}$$



## Corrigé

6. a. Pour 20 disques,

$$\begin{aligned} u_{20} &= 2^{20} - 1 \\ &= 1\,048\,575. \end{aligned}$$

À raison de deux déplacements par seconde, la durée minimale est

$$\frac{1\,048\,575}{2} = 524\,287,5$$

secondes.

En jours :

$$\frac{524\,287,5}{24 \times 3600} \simeq 6,07.$$

Il faudrait donc environ

$$\boxed{6,1 \text{ jours}}.$$

6. b. Pour 40 disques,

$$u_{40} = 2^{40} - 1 = 1\,099\,511\,627\,775.$$

À raison de deux déplacements par seconde, la durée vaut environ

$$5,50 \times 10^{11}$$

secondes.

Une année représente

$$365 \times 24 \times 3600 = 31\,536\,000$$

secondes.

Ainsi,

$$\frac{5,50 \times 10^{11}}{31\,536\,000} \simeq 1,74 \times 10^4.$$

Il faudrait donc environ

$$\boxed{17\,400 \text{ ans}}.$$

**7. Final challenge.**

Le joueur dispose exactement de 24 heures.

Quel est le plus grand nombre de disques pour lequel il peut terminer le jeu à raison de deux déplacements par seconde ?

**Corrigé**

En 24 heures, le joueur peut effectuer

$$2 \times 24 \times 3600 = 172\,800$$

déplacements.

On cherche donc le plus grand entier  $n$  tel que

$$2^n - 1 \leq 172\,800.$$

Or,

$$2^{17} - 1 = 131\,071$$

et

$$2^{18} - 1 = 262\,143.$$

Ainsi,

$$131\,071 \leq 172\,800 < 262\,143.$$

Par conséquent,

$$\boxed{n = 17}.$$

Le joueur peut donc terminer une tour de 17 disques en moins de 24 heures, mais pas une tour de 18 disques.

## Thème XIII

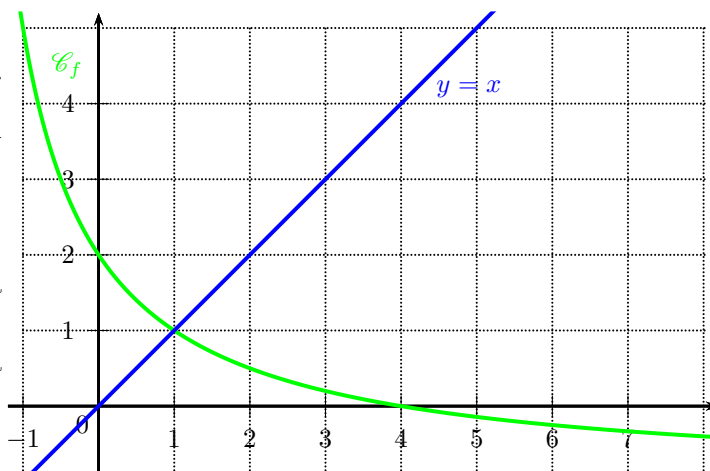
## Représentation en escalier d'une suite récurrente

**Exercice 56** **[!] Bilan** Construire les premiers termes avec  $y = f(x)$  et  $y = x$ 

Dans un repère orthonormé, on a représenté la fonction  $f$  définie sur  $] -2 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{6}{x+2} - 1$  et la droite d'équation  $y = x$ .

On définit la suite  $(u_n)$  par  $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Reproduire et représenter les cinq premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
2. Émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite, puis sur sa limite.

**Parcours A – Consolider**

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 57, page 82.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

**Parcours B – Approfondissement**

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 58, page 84.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

**Corrigé**

1. Pour une construction en escalier, partir de  $u_0 = 5$  sur l'axe horizontal, monter jusqu'à la courbe  $y = f(x)$ , puis rejoindre horizontalement la droite  $y = x$ ; répéter. Les calculs permettant de vérifier les cinq abscisses sont

$$u_1 = f(5) = \frac{6}{7} - 1 = -\frac{1}{7}, \quad u_2 = f\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{42}{13} - 1 = \frac{29}{13},$$

$$u_3 = f\left(\frac{29}{13}\right) = \frac{78}{55} - 1 = \frac{23}{55}, \quad u_4 = f\left(\frac{23}{55}\right) = \frac{330}{133} - 1 = \frac{197}{133}.$$

2. Comme  $u_0 = 5 > u_1 = -1/7$  mais  $u_2 = 29/13 > u_1$ , la suite n'est pas monotone. Sur le dessin, les termes semblent se rapprocher de 1 : on conjecture cette limite. La valeur 1 est cohérente avec la récurrence puisque  $f(1) = 6/(1+2) - 1 = 1$ ; cette vérification ne suffit pas à elle seule à démontrer la convergence.

**Exercice 57** **[+] Consolidation** Une autre construction en escalier

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0 ; 6]$  par

$$g(x) = \frac{x+4}{2}$$

et la suite  $(w_n)$  définie par  $w_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$w_{n+1} = g(w_n).$$

Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de  $g$  et la droite d'équation  $y = x$ , puis construire sur l'axe des abscisses les termes  $w_0$  à  $w_5$ . Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite.

**Corrigé**

La courbe de  $g$  est la droite  $y = x/2 + 2$  : elle passe par  $(0; 2)$  et  $(4; 4)$ . On trace aussi  $y = x$  puis on alterne un segment vertical vers la courbe de  $g$  et un segment horizontal vers la droite  $y = x$ .

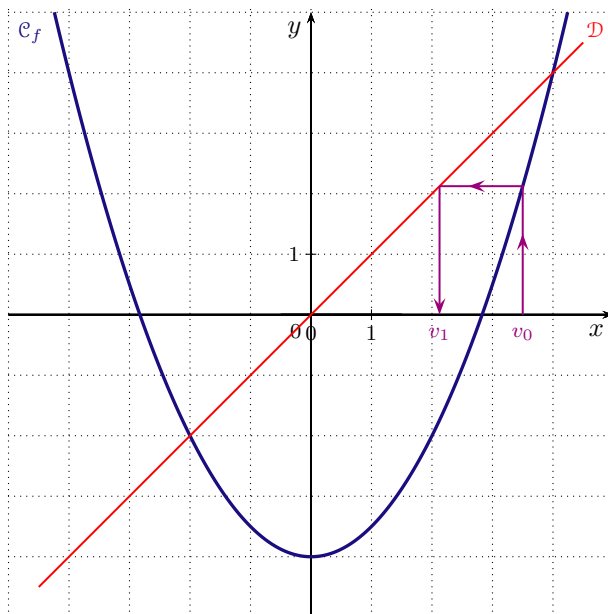
$$w_0 = 1, \quad w_1 = \frac{1+4}{2} = 2,5, \quad w_2 = \frac{2,5+4}{2} = 3,25, \quad w_3 = 3,625, \quad w_4 = 3,8125, \quad w_5 = 3,90625.$$

Le dessin suggère une croissance vers 4. Pour confirmer cette conjecture, fixons un entier naturel  $n \geq 0$ . La relation  $w_{n+1} = (w_n + 4)/2$  donne  $4 - w_{n+1} = (4 - w_n)/2$ ; de plus  $4 - w_0 = 3$ . La suite  $(4 - w_n)$  est donc géométrique de raison  $1/2$  : pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $w_n = 4 - 3/2^n < 4$ . Dès lors  $w_{n+1} - w_n = (4 - w_n)/2 > 0$  à tout rang, et  $w_n$  tend vers 4 car  $(1/2)^n$  tend vers 0.

**Exercice 58** [\*] **Approfondissement Une suite qui n'est pas monotone**

Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_0 = \frac{7}{2}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{2} - 4$ .

On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la parabole  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$ .



- On a représenté sur l'axe des abscisses, les deux premiers termes de la suite  $(v_n)$ .  
En utilisant la courbe  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $\mathcal{D}$  placer sur l'axe des abscisses les termes  $v_2$  à  $v_6$ .
- La suite  $(v_n)$  est-elle monotone (c'est à dire croissante ou décroissante) ?

**Corrigé**

La lecture graphique, contrôlée avec  $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{2} - 4$ , donne approximativement

$$v_0 = 3,5, \quad v_1 = 2,125, \quad v_2 \simeq -1,74, \quad v_3 \simeq -2,48,$$

$$v_4 \simeq -0,92, \quad v_5 \simeq -3,58, \quad v_6 \simeq 2,40.$$

Par exemple  $v_2 = (17/8)^2/2 - 4 = -223/128 \simeq -1,74$ . On a  $v_1 < v_0$ , mais  $v_4 > v_3$  : une suite croissante ne pourrait avoir  $v_1 < v_0$ , et une suite décroissante ne pourrait avoir  $v_4 > v_3$ . Donc  $(v_n)$  n'est pas monotone.

↔ **Fin du TD** ↔