Fiches bilan
Première spécialité mathématiques

Synthèse des chapitres du cours

MATH 93 .com

Un document pour réviser vite, juste et efficacement.

Définitions essentielles, formules, méthodes, exemples types et pièges classiques.

Mode d'emploi

— Chaque fiche est pensée pour tenir sur une ou deux pages et aller directement à l'essentiel.
— Les encadrés verts contiennent les propriétés à connaître, les encadrés orange les méthodes à appliquer.
— Les encadrés rouges signalent les erreurs fréquentes à éviter dans les devoirs.

Document généré par ChatGPT à partir des fichiers de cours fournis par M. Duffaud.

Table des matières

Fiche 1

Second degré

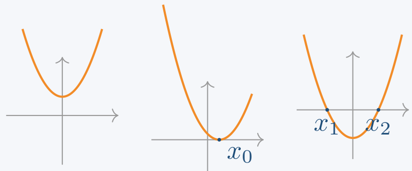
$ax^2 + bx + c$

Objectif. Savoir reconnaître, transformer, résoudre et étudier le signe d'un polynôme du second degré.

Vue d'ensemble : discriminant, racines, signe et allure des paraboles

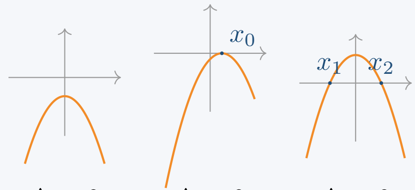
	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Racines	aucune	$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation	impossible dans $\mathbb{R}$	$a(x-x_0)^2$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
Signe	signe de a sur $\mathbb{R}$	signe de a sur $\mathbb{R}$ et nul en x_0	signe de a à l'extérieur des racines, signe opposé entre elles

Cas $a > 0$



$\Delta < 0$ $\Delta = 0$ $\Delta > 0$

Cas $a < 0$



$\Delta < 0$ $\Delta = 0$ $\Delta > 0$

Définitions - formes utiles

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

— **Développée** : $ax^2 + bx + c$.

— **Canonique** : $a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

— **Factorisée** : $a(x-x_1)(x-x_2)$ si les racines réelles existent.

Propriétés - sommet, variations et discriminant

Le sommet est $S\,(\alpha\,;\,\beta)$ avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \qquad \beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut : minimum en α. Si $a < 0$, elle est tournée vers le bas : maximum en α.

Méthodes - étudier le signe

1. Calculer Δ puis les racines éventuelles.
2. Factoriser si possible.
3. Utiliser la règle : **du signe de a à l'extérieur des racines, du signe opposé entre les racines**.

Exemple type - résolution et tableau de signe

Pour $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$, on a $\Delta = 9$, donc

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = 2, \qquad f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2).$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $f(x) \geq 0$ sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right] \cup [2\,;\,+\infty[$ et $f(x) < 0$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;\,2\right[$.

Pièges - à éviter

— Confondre $-\dfrac{b}{2a}$ avec une racine : c'est l'abscisse du sommet.

— Dire qu'il y a deux solutions lorsque $\Delta = 0$: il n'y a qu'une racine réelle, dite double.

— Oublier le coefficient a dans la factorisation.

Fiche 2

Dérivation : nombre dérivé et fonction dérivée $f'(a)$

Objectif. Comprendre la tangente, calculer une dérivée et utiliser les règles de dérivation.

Définitions - nombre dérivé

Pour une fonction f définie autour de a, le **taux d'accroissement** entre a et $a+h$ est

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (h \neq 0).$$

Si ce quotient tend vers un réel lorsque h tend vers 0, alors f est dérivable en a et cette limite est $f'(a)$.

Propriétés - tangente

Si f est dérivable en a, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Le coefficient directeur de la tangente est $f'(a)$.

Propriétés - dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$

Attention : $\sqrt{x}$ est définie en 0, mais sa formule de dérivée n'est valable que pour $x > 0$.

Propriétés - opérations et compositions simples

Si u et v sont dérivables :

$$(u+v)' = u' + v', \quad (ku)' = ku', \quad (uv)' = u'v + uv'.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0), \qquad (u^n)' = nu'u^{n-1}.$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

Méthodes - calculer une dérivée proprement

1. Identifier la structure : somme, produit, quotient, puissance composée.
2. Poser éventuellement u et v.
3. Appliquer la formule, puis simplifier sans perdre l'ensemble de définition.

Exemple type - tangente

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Alors $f'(x) = 2x - 3$. En $a = 2$: $f(2) = -1$ et $f'(2) = 1$. La tangente est donc

$$y = 1(x-2) - 1 = x - 3.$$

Exemple type - définie en 0, mais non dérivable en 0

1. $f(x) = \sqrt{x}$ est définie en 0 et $f(0) = 0$.

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h\to 0^+]{} +\infty.$$

Donc $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

2. $g(x) = |x|$ est définie en 0 et $g(0) = 0$.

$$\frac{g(h)-g(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0, \\ -1 & \text{si } h < 0. \end{cases}$$

Les limites à droite et à gauche sont différentes : $|x|$ n'est pas dérivable en 0.

Pièges - à éviter

- Dériver u/v comme u'/v' : c'est faux.
- Oublier le facteur u' dans une fonction composée.
- Penser que « définie en a » implique « dérivable en a ».

Fiche 3

Étude de fonctions avec la dérivée $f \Rightarrow$ variations

Objectif. Utiliser le signe de la dérivée pour dresser un tableau de variations et déterminer des extremums.

Propriétés - lien signe de f' et variations

Soit f dérivable sur un intervalle I.

— Si $f'(x) > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.

— Si $f'(x) < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

— Si $f'(x) = 0$ sur I, alors f est constante sur I.

Définitions - extremum

f admet un maximum en a sur I si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$. f admet un minimum en a sur I si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$.

Propriétés - extremum local

Si f' change de signe en a :

— de $+$ vers $-$: $f(a)$ est un maximum local ;

— de $-$ vers $+$: $f(a)$ est un minimum local.

La condition $f'(a) = 0$ seule ne suffit pas toujours pour conclure.

Méthodes - étudier les variations

1. Donner l'ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variations.
5. Lire les extremums éventuels.

Exemple type - fonction polynôme avec tableau

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi f admet un maximum local égal à 4 en $x = -1$ et un minimum local égal à 0 en $x = 1$.

Méthodes - résoudre une inéquation avec variations

Quand on connaît les variations de f, on peut comparer $f(x)$ à une valeur k en lisant les intervalles où la courbe est au-dessus ou au-dessous de la droite $y = k$.

Pièges - à éviter

— Faire un tableau de variations sans tableau de signe de f'.

— Confondre le signe de f et le signe de f'.

— Oublier de calculer les images aux valeurs critiques.

Méthodes - check-list

☐ Je sais factoriser ou étudier le signe de f'.

☐ Je sais traduire $f' > 0$ en croissance.

☐ Je sais reconnaître un changement de variation.

Fiche 4

Suites : généralités

u_n

Objectif. Maîtriser les modes de définition d'une suite, ses variations et les notions de majoration/minoration.

Définitions - suite numérique

Une suite numérique est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{N}$ et à valeurs réelles. On note u_n le terme de rang n et (u_n) la suite.

Définitions - deux modes de définition

- **Formule explicite** : $u_n = f(n)$. On calcule directement n'importe quel terme.
- **Relation de récurrence** : on connaît un premier terme et une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Propriétés - variations

- (u_n) est croissante si, pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est décroissante si, pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$.

Pour étudier les variations, on peut étudier le signe de

$$u_{n+1} - u_n.$$

Si les termes sont strictement positifs, on peut aussi comparer

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{à } 1.$$

Définitions - majorée, minorée, bornée

- (u_n) est majorée par M si, pour tout n, $u_n \leq M$.
- (u_n) est minorée par m si, pour tout n, $u_n \geq m$.
- (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée.

Méthodes - calculer des termes

Pour une suite définie par récurrence :

$$u_0 \longrightarrow u_1 \longrightarrow u_2 \longrightarrow \cdots$$

Chaque terme dépend du précédent : il faut respecter l'ordre des calculs.

Exemple type - variations par différence

Soit $u_n = n^2 - 4n$.

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) - (n^2 - 4n) = 2n - 3.$$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$ pour $n = 0$ et $n = 1$, puis $u_{n+1} - u_n > 0$ pour $n \geq 2$. La suite décroît puis croît.

Pièges - à éviter

- Confondre u_n et u_{n+1}.
- Utiliser le quotient u_{n+1}/u_n si certains termes peuvent être nuls ou négatifs.
- Dire qu'une suite est une liste finie : une suite est en général infinie.

Fiche 5

Suites arithmétiques et géométriques $+r$ ou $\times q$

Objectif. Reconnaître une suite de référence, déterminer son terme général, ses variations et les sommes classiques.

Définitions - suite arithmétique

(u_n) est arithmétique de raison r si

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le passage d'un terme au suivant se fait par **addition d'une constante**.

Propriétés - arithmétique : terme général

Si le premier terme connu est u_p, alors pour $n \geq p$:

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

En particulier : $u_n = u_0 + nr$.

Propriétés - arithmétique : variations

- Si $r > 0$, la suite est croissante.
- Si $r < 0$, la suite est décroissante.
- Si $r = 0$, la suite est constante.

Propriétés - arithmétique : somme

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Plus généralement :

$$\text{somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}.$$

Définitions - suite géométrique

(u_n) est géométrique de raison q si

$$u_{n+1} = qu_n.$$

Le passage d'un terme au suivant se fait par **multiplication par une constante**.

Propriétés - géométrique : terme général

Si le premier terme connu est u_p, alors pour $n \geq p$:

$$\boxed{u_n = u_p\, q^{n-p}}$$

En particulier : $u_n = u_0 q^n$.

Propriétés - géométrique : variations

Pour $q > 0$:
- si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite est croissante ;
- si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, la suite est décroissante ;
- si $u_0 < 0$, les sens sont inversés.

Si $q < 0$, la suite alterne souvent de signe : elle n'est généralement pas monotone.

Propriétés - géométrique : somme

Pour $q \neq 1$:

$$\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Plus généralement :

$$\text{somme} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$

Pièges - à éviter

- Confondre raison arithmétique r et raison géométrique q.
- Écrire $u_n = u_0 + q^n$ pour une suite géométrique : la bonne formule est $u_0 q^n$.
- Oublier le nombre exact de termes dans une somme.

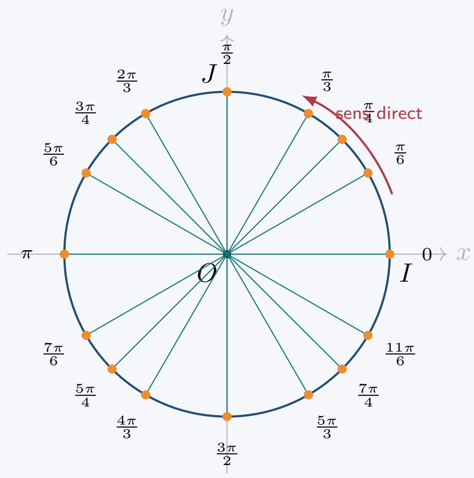
Fiche 6

Trigonométrie : cercle et angles

$\cos x, \sin x$

Objectif. Se repérer sur le cercle trigonométrique, connaître les valeurs remarquables et résoudre les équations de base.

Cercle trigonométrique : angles remarquables



Définitions - cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O, de rayon 1, orienté dans le sens direct. À tout réel x, on associe un point M du cercle tel que

$$M(\cos x\,;\,\sin x).$$

Propriétés - radian et périodicité

$$2\pi \text{ rad} = 360°, \qquad \pi \text{ rad} = 180°.$$

Les angles x et $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ correspondent au même point du cercle.

Propriétés - valeurs remarquables (1er quadrant)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriétés - identité fondamentale et angles associés

Pour tout réel x :

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \sin(-x) = -\sin x.$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \qquad \sin(\pi - x) = \sin x.$$

Propriétés - équations trigonométriques usuelles

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = \cos a \iff x = 2k\pi \pm a,\ \ k \in \mathbb{Z},$$
$$\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi,$$
$$\tan x = \tan a \iff x = a + k\pi.$$

En particulier :

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi, \qquad \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Méthodes - résoudre sur un intervalle

1. Repérer la valeur cherchée : abscisse pour le cosinus, ordonnée pour le sinus.
2. Placer les points du cercle ayant cette abscisse ou cette ordonnée.
3. Écrire la solution générale, puis garder uniquement les solutions de l'intervalle demandé.

Exemple type - équation trigonométrique

Sur $[0\,;\,2\pi]$, résoudre $\cos x = \dfrac{1}{2}$ donne

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{3}.$$

Et sur $\mathbb{R}$:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pièges - à éviter

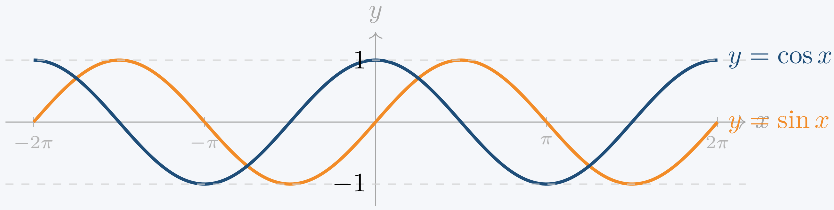
- Oublier qu'une équation trigonométrique a souvent plusieurs solutions.
- Confondre $\cos x$ et $\sin x$ dans le tableau des valeurs remarquables.
- Répondre avec des solutions hors de l'intervalle imposé.

Fiche 7

Fonctions sinus, cosinus et tangente $\sin, \cos, \tan$

Objectif. Étudier les fonctions trigonométriques : dérivées, variations, parité et périodicité.

Graphes de $\sin$ et $\cos$ sur une période



Définitions - sinus et cosinus

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ par les coordonnées du point du cercle trigonométrique associé à x. Elles sont 2π-périodiques :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Définitions - fonction paire ou impaire

Soit f définie sur un ensemble D **symétrique par rapport à** 0, c'est-à-dire :

$$x \in D \iff -x \in D.$$

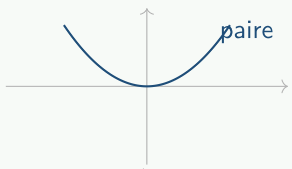
— f est **paire** si, pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

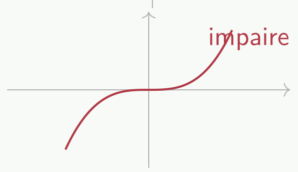
— f est **impaire** si, pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

Propriétés - parité de sinus et cosinus

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{donc } \cos \text{ est paire.}$$

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{donc } \sin \text{ est impaire.}$$





Propriétés - dérivées

Pour tout réel x :

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x.$$

Si u est dérivable :

$$(\sin u)' = u' \cos u, \qquad (\cos u)' = -u' \sin u.$$

Propriétés - variations sur $[0\,;\,\pi]$

— $\sin$ croît sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ puis décroît sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.

— $\cos$ décroît sur $[0\,;\,\pi]$.

Définitions - fonction tangente

Lorsque $\cos x \neq 0$,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Propriétés - tangente

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

La fonction tangente est π-périodique et impaire.

Méthodes - étudier une fonction trigonométrique

1. Commencer par l'ensemble de définition.
2. Utiliser la périodicité pour réduire l'étude à un intervalle simple.
3. Utiliser la parité pour obtenir des symétries.
4. Calculer la dérivée pour les variations.

Exemple type - dérivée composée

Pour $f(x) = \sin(3x + 1)$:

$$f'(x) = 3\cos(3x + 1).$$

Pour $g(x) = \cos(x^2)$:

$$g'(x) = -2x \sin(x^2).$$

Pièges - à éviter

— Dire que $\tan$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.

— Oublier le signe moins dans $(\cos x)' = -\sin x$.

— Étudier la parité sans vérifier que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0.

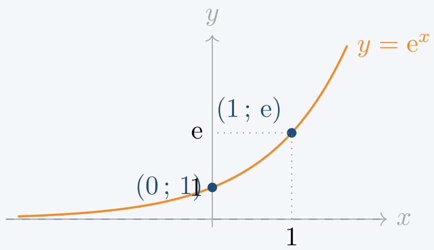
Fiche 8

Fonction exponentielle

e^x

Objectif. Connaître la définition, les propriétés algébriques, la dérivée et les variations de la fonction exponentielle.

Courbe de la fonction exponentielle



- La courbe passe par $(0\,;\,1)$.
- Elle est toujours au-dessus de l'axe des abscisses : $e^x > 0$.
- Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- L'axe des abscisses est une asymptote horizontale lorsque x devient très négatif.

Définitions - définition

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

On la note $\exp(x)$ ou e^x.

Propriétés - valeurs et signe

Pour tout réel x :

$$e^x > 0, \qquad e^0 = 1, \qquad e^1 = e.$$

L'exponentielle ne s'annule jamais.

Propriétés - relation fonctionnelle

Pour tous réels x et y :

$$e^{x+y} = e^x e^y, \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

Pour tout entier relatif n :

$$(e^x)^n = e^{nx}.$$

Propriétés - dérivée et variations

$$(e^x)' = e^x.$$

Comme $e^x > 0$ pour tout x, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriétés - composition

Si u est dérivable, alors

$$\boxed{(e^u)' = u'e^u}$$

Méthodes - équations et inéquations

Comme e^x est strictement croissante :

$$e^a = e^b \iff a = b, \qquad e^a < e^b \iff a < b.$$

On ne prend pas de logarithme si ce n'est pas au programme ou pas nécessaire.

Exemple type - équation

$$e^{2x-1} = e^{x+3} \iff 2x - 1 = x + 3 \iff x = 4.$$

Exemple type - étude d'une composée

Soit $f(x) = e^{x^3+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = (3x^2 + 2x)e^{x^3+x^2} = x(3x+2)e^{x^3+x^2}.$$

Comme $e^{x^3+x^2} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x(3x+2)$.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$e^{4/27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Pièges - à éviter

- Écrire $e^{x+y} = e^x + e^y$: c'est faux.
- Chercher une solution à $e^x = 0$: il n'y en a pas.
- Oublier le facteur u' dans la dérivée de e^u.

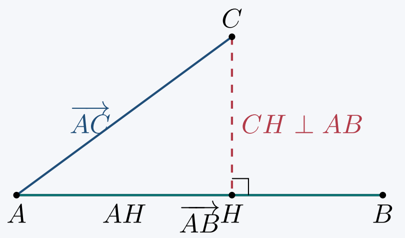
Fiche 9

Produit scalaire

$\vec{u} \cdot \vec{v}$

Objectif. Calculer un produit scalaire, démontrer une orthogonalité et exploiter les formules de géométrie.

Comprendre le projeté orthogonal



Si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH.$$

Autrement dit, le produit scalaire mesure la **projection** de $\overrightarrow{AC}$ sur la direction de $\overrightarrow{AB}$.

— si H est entre A et B, alors $AH > 0$;

— si H est de l'autre côté de A, alors $AH < 0$ (projection négative).

Définitions - norme et produit scalaire

Pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ faisant un angle θ :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta}$$

La norme d'un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Propriétés - formule analytique

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

Propriétés - avec les normes

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right).$$

Propriétés - orthogonalité

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Propriétés - Al-Kashi

Dans un triangle ABC :

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB\,AC\cos(\widehat{BAC})}$$

C'est la généralisation du théorème de Pythagore.

Méthodes - calculer un angle

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls :

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}.$$

On en déduit l'angle avec la calculatrice lorsque c'est autorisé.

Exemple type - orthogonalité

Avec $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 6 + (-3) \times 4 = 12 - 12 = 0.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Pièges - à éviter

— Confondre coordonnées d'un point et coordonnées d'un vecteur.

— Oublier les normes dans la formule avec le cosinus.

— Conclure à l'orthogonalité sans vérifier que le produit scalaire est nul.

Fiche 10

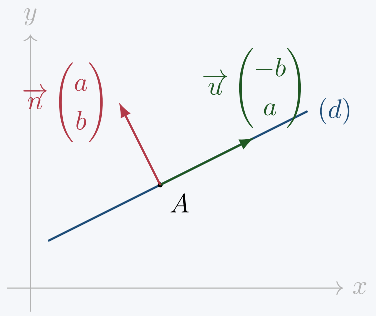
Géométrie repérée : coordonnées, droites, cercles

$ax + by + c = 0$

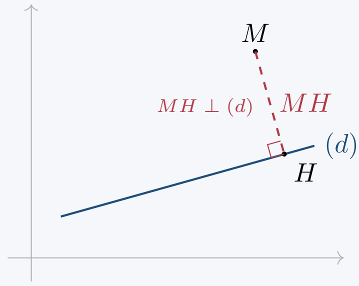
Objectif. Utiliser les vecteurs directeurs et normaux, déterminer des équations et calculer des distances.

Dessins-clés pour visualiser le chapitre

Droite, vecteur directeur et vecteur normal



Distance point-droite



Propriétés - repère orthonormé, distance et Chasles

Dans un repère orthonormé, si $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$, alors

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Pour tous points A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \qquad \text{(relation de Chasles).}$$

Le milieu I de $[AB]$ vérifie :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Définitions - droite cartésienne

Une droite peut avoir une équation cartésienne

$$ax + by + c = 0$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Méthodes - droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

Si $A(x_A\,;\,y_A)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors $M(x\,;\,y)$ appartient à la droite si

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

Donc $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.

Propriétés - parallélisme et perpendicularité

Pour deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

— elles sont parallèles si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;

— elles sont perpendiculaires si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Pièges - à éviter

— Prendre $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ comme vecteur normal au lieu de vecteur directeur.

— Oublier que le vecteur normal est perpendiculaire à la droite.

— Développer une équation de cercle sans savoir retrouver centre et rayon.

Propriétés - distance point-droite : complément

La formule suivante est un **complément utile** : elle n'est pas toujours exigible en première. Pour $A(x_A\,;\,y_A)$ et $d : ax + by + c = 0$:

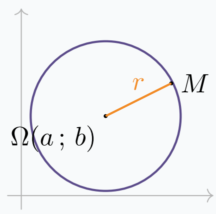
$$\boxed{d(A, d) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Cette formule est surtout à connaître comme complément : dans les exercices, on pourra aussi déterminer le projeté orthogonal H puis calculer AH.

Définitions - cercle

Le cercle de centre $\Omega(a\,;\,b)$ et de rayon r a pour équation :

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$



Exemple : le cercle de centre $\Omega(2\,;\,-1)$ et de rayon 3 a pour équation $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

$$M \in \text{cercle de diamètre } [AB] \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Fiche 11

Probabilités conditionnelles et arbres

$\mathbb{P}_A(B)$

Objectif. Utiliser les probabilités conditionnelles, les arbres pondérés, les probabilités totales et l'indépendance.

Définitions - probabilité conditionnelle

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, la probabilité de B sachant A est

$$\boxed{\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}}$$

Donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B).$$

Propriétés - arbre pondéré

Sur un arbre de probabilités :

- la somme des probabilités issues d'un même noeud vaut 1 ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches ;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le réalisent.

Propriétés - probabilités totales

Si B et C forment une partition de l'univers, alors d'après la formule des probabilités totale :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C)}$$

Définitions - partition

Des événements forment une partition lorsqu'ils sont deux à deux incompatibles et que leur réunion est l'univers.

Propriétés - indépendance

Deux événements A et B sont indépendants si

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}$$

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, cela équivaut à $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Méthodes - résoudre un exercice avec arbre

1. Identifier les événements et leurs complémentaires.
2. Remplir toutes les branches, en utilisant les compléments si nécessaire.
3. Multiplier le long d'un chemin.
4. Additionner les chemins lorsque plusieurs cas réalisent l'événement.

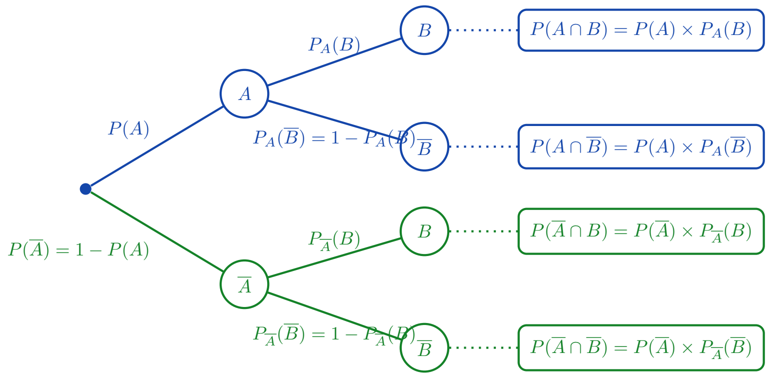
Exemple type - formule des probabilités totales

Si $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$, $\mathbb{P}_A(B) = 0{,}8$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$, alors

$$\mathbb{P}(B) = 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}38.$$

Pièges - à éviter

- Confondre $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$.
- Additionner les probabilités le long d'un chemin : on les multiplie.
- Confondre événements incompatibles et événements indépendants.



Sur la deuxième étape, les probabilités sont conditionnelles : elles dépendent de la branche précédente.

Fiche 12

Variables aléatoires

$X, \mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X)$

Objectif. Décrire une loi de probabilité, calculer l'espérance, la variance et l'écart-type.

Définitions - variable aléatoire

Une variable aléatoire X associe un nombre réel à chaque issue d'une expérience aléatoire. L'événement $\{X = x_i\}$ regroupe les issues pour lesquelles X prend la valeur x_i.

Définitions - loi de probabilité

Donner la loi de X, c'est donner toutes les valeurs x_i prises par X et les probabilités associées $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

$$\sum_i p_i = 1.$$

Propriétés - espérance

L'espérance de X est

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i}$$

Elle s'interprète comme la moyenne théorique sur un très grand nombre de répétitions.

Propriétés - variance et écart-type

$$\mathbb{V}(X) = \sum_i (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i.$$

Formule de König-Huygens :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}$$

L'écart-type est

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Propriétés - linéarité

Pour tous réels a et b :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X), \qquad \sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X).$$

Méthodes - calculer une loi

1. Lister toutes les valeurs possibles de X.
2. Calculer la probabilité de chaque valeur.
3. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
4. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$ si demandé.

Exemple type - loi, espérance et variance

On donne la loi de probabilité de X par le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On vérifie : $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$.

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1.$$

Puis

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

Donc, avec König-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Pièges - à éviter

- Oublier de vérifier que les probabilités totalisent 1.
- Calculer la variance avec $\sum x_i p_i$ au lieu de $\sum (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i$.
- Interpréter l'espérance comme une valeur forcément atteinte par X.

Fiche 13

Python et algorithmique des suites

Objectif. Savoir lire et écrire des boucles Python, manipuler range et les listes, puis programmer les termes d'une suite ou un algorithme de seuil.

Définitions - variables et affectation

En Python, l'affectation utilise le symbole =.

```
u = 3
u = 2*u + 1
```

Après ces instructions, la variable u contient la nouvelle valeur calculée.

Le symbole == sert à tester une égalité.

```
u == 3
```

Propriétés - opérations usuelles

Instruction	Signification	Exemple
+	addition	`3 + 4`
-	soustraction	`7 - 2`
*	multiplication	`3 * 5`
/	division décimale	`7 / 2`
//	quotient entier	`17 // 5`
%	reste entier	`17 % 5`
**	puissance	`2 ** 4`

Exemple type - division euclidienne

En Python :

```
17 // 5      # donne 3
17 % 5       # donne 2
```

Cela correspond à la division euclidienne :

$$17 = 5 \times 3 + 2.$$

Pièges - puissance

En Python, la puissance ne s'écrit pas avec ^.
Il faut écrire :

```
2 ** 3       # donne 8
5 ** 2       # donne 25
```

Définitions - fonctions et return

Une fonction permet de regrouper des instructions et de réutiliser un calcul.

```
def nom_de_la_fonction(parametre):
    instructions
    return resultat
```

Le mot-clé return permet de renvoyer le résultat calculé par la fonction.

Exemple type - fonction simple

```
def carre(x):
    return x ** 2

print(carre(5))
```

Le programme affiche :

$$25.$$

Définitions - boucle for et range

Une boucle for répète un bloc d'instructions un nombre connu de fois.

— `range(n)` produit les entiers de 0 à $n-1$.

— `range(a,b)` produit les entiers de a à $b-1$.

— `range(a,b,p)` avance avec un pas p.

Attention : la borne de droite n'est pas incluse.

Propriétés - exemples avec range

Instruction	Valeurs prises
`range(4)`	$0, 1, 2, 3$
`range(2,6)`	$2, 3, 4, 5$
`range(1,8,2)`	$1, 3, 5, 7$
`range(8,1,-2)`	$8, 6, 4, 2$

Définitions - boucle while

Une boucle while répète un bloc tant qu'une condition est vraie.
Elle est adaptée lorsqu'on ne connaît pas à l'avance le nombre de répétitions.

— On initialise les variables avant la boucle.

— On modifie une variable dans la boucle.

— Sinon, on risque une boucle infinie.

Propriétés - listes

Une liste permet de stocker plusieurs valeurs dans un ordre donné.

— Le premier indice est 0.

— `L.append(x)` ajoute la valeur x à la fin.

— `L[i]` donne l'élément d'indice i.

— `len(L)` donne le nombre d'éléments.

Pièges - erreurs fréquentes

— Confondre `range(n)` et les entiers de 1 à n.

— Oublier d'incrémenter n dans une boucle while.

— Écrire = au lieu de == dans un test.

— Écrire `2^3` au lieu de `2 ** 3`.

— Oublier le return dans une fonction qui doit renvoyer un résultat.

— Pour une suite récurrente, oublier que la nouvelle valeur dépend de l'ancienne.

Exemple type - boucle `for` et premiers termes

On considère la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Le programme suivant calcule u_N.

```python
def terme(N):
    u = 3
    for n in range(N):
        u = 2*u + 1
    return u

print(terme(5))  # affiche u_5
```

Méthodes - algorithme des termes d'une suite récurrente

Pour obtenir la liste des termes $u_0, u_1, \dots, u_N$:

1. initialiser `u` avec u_0 ;
2. créer une liste contenant u_0 ;
3. répéter N fois la relation de récurrence ;
4. ajouter chaque nouveau terme à la liste ;
5. renvoyer la liste avec `return`.

Méthodes - algorithme de seuil

Un algorithme de seuil sert à trouver le premier rang n à partir duquel une condition est vérifiée, par exemple $u_n \geqslant 100$.

1. Initialiser `u` et `n`.
2. Tant que le seuil n'est pas atteint, calculer le terme suivant.
3. Augmenter le rang `n` de 1.
4. À la fin, renvoyer `n` et `u`.

Exemple type - liste des termes

Ici, `valeurs` contient les termes de u_0 à u_N.

```python
def termes(N):
    u = 3
    valeurs = [u]
    for n in range(N):
        u = 2*u + 1
        valeurs.append(u)
    return valeurs

print(termes(5))
```

Exemple type - algorithme de seuil avec une fonction

Premier rang n tel que $u_n \geqslant S$ pour $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

```python
def seuil(S):
    u = 3
    n = 0
    while u < S:
        u = 2*u + 1
        n = n + 1
    return n, u

print(seuil(100))
```

Méthodes - traduction mathématiques ↔ Python

Mathématiques	Python
$u_0 = 3$	`u = 3`
$u_{n+1} = 2u_n + 1$	`u = 2*u + 1`
$u_n < S$	`u < S`
$n \leftarrow n + 1$	`n = n + 1`
u_n^2	`u ** 2`
$2u_n$	`2*u`
Quotient de a par b	`a // b`
Reste de a par b	`a % b`
Renvoyer une valeur	`return u`
Renvoyer deux valeurs	`return n, u`
Ajouter u dans une liste	`valeurs.append(u)`

Fiche 14

Mini-formulaire de fin d'année Révisions express

Objectif. Avoir sous les yeux les formules à mobiliser rapidement avant une évaluation.

Propriétés - algèbre et fonctions

— Second degré : $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Sommet : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, $\beta = f(\alpha)$.

— Tangente : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

— Variations : signe de f'.

— Exponentielle : $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.

Propriétés - suites

— Arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$, $u_n = u_p + (n-p)r$.

— Géométrique : $u_{n+1} = qu_n$, $u_n = u_p q^{n-p}$.

— Somme géométrique : $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Propriétés - trigonométrie

— $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

— $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$.

— $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, définie si $\cos x \neq 0$.

Propriétés - géométrie

— $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$.

— Orthogonalité : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

— Distance point-droite : $d(A, d) = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

— Cercle : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Propriétés - probabilités

— $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

— $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$.

— $\mathbb{E}(X) = \sum x_i p_i$.

— $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Pièges - réflexes de rédaction

— Toujours annoncer l'ensemble de définition avant une dérivée délicate.

— Justifier un tableau de variations par le signe de la dérivée.

— Dans un exercice de probabilités, nommer clairement les événements.

— Dans une question de géométrie repérée, distinguer point, vecteur directeur et vecteur normal.