



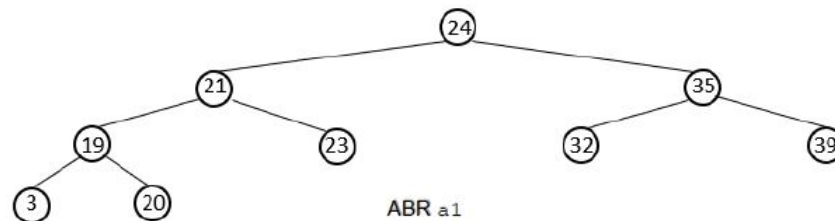
Partie 1 : épreuve écrite, Arbres et Algorithmique

Exercice 1. Quelques notions

7 points

1. Écrire la suite des sommets, pour l'arbre de la figure suivante, dans chaque cas :

- Parcours en largeur,
- Parcours préfixe (sens anti-horaire),
- Parcours infixé (sens anti-horaire),
- Parcours suffixé (sens anti-horaire).



Corrigé (4 pts)

- Parcours en largeur : 24,21,35,19,23,32,39,3,20
- Parcours préfixe : 24,21,19,3,20,23,35,32,39
- Parcours infixé : 3,19,20,21,23,24,32,35,39
- Parcours suffixé : 3,20,19,23,21,32,39,35,24

2. Quelle est la racine de cette arbre? Indiquez les feuilles de cette arbre. Quelle est la taille de cette arbre?



Corrigé (1 pt)

- La racine de l'arbre est 24.
Les feuilles sont : 3,20,23,32 et 39.
La taille est 9.

3. Ecrire l'algorithme en pseudo-code d'une fonction **parcoursInfixe(arbre)** qui affiche les étiquettes d'un arbre dans un parcours infixé.



Corrigé (2 pts)

- fonction **parcoursInfixe(arbre)** :
- Si l'arbre n'est pas vide
 - parcoursInfixe(sous-arbre gauche)
 - Afficher racine

parcoursInfixe(sous-arbre droit)
FinSi

Exercice 2. Arbre binaire de recherche

14 points

Dans cet exercice, la taille d'un arbre est égale au nombre de ses noeuds et on convient que la hauteur d'un arbre ne contenant qu'un noeud vaut 1. On utilisera la définition suivante : un arbre binaire de recherche est un arbre binaire, dans lequel

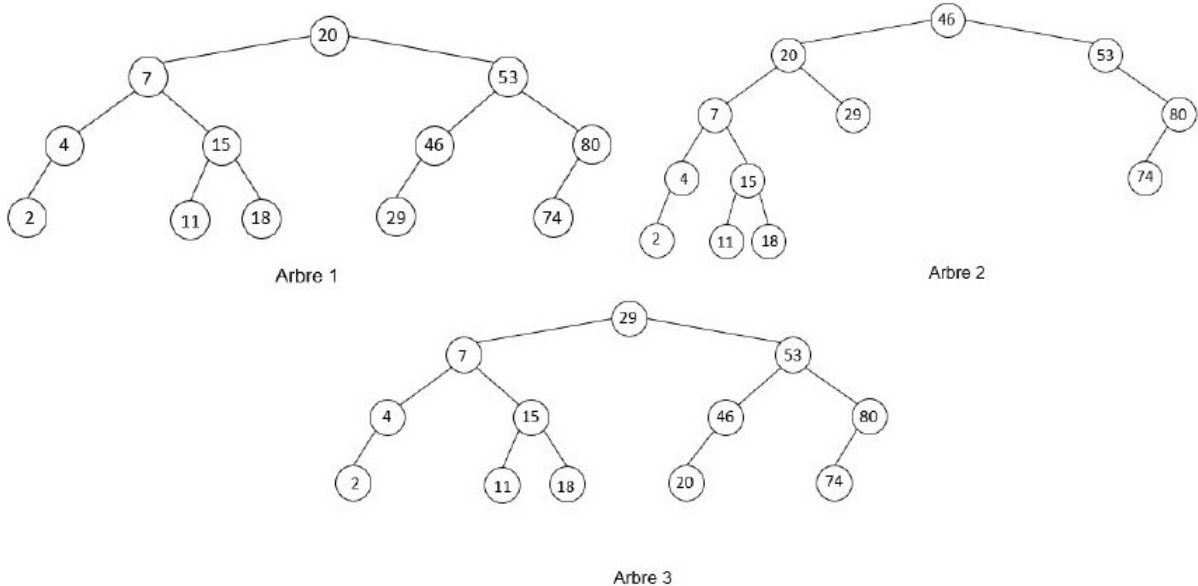
- on peut comparer les valeurs des noeuds : ce sont par exemple des nombres entiers, ou des lettres de l'alphabet;
- si x est un noeud de cet arbre et y est un noeud du sous-arbre gauche de x , alors il faut que :

$$y.valeur < x.valeur$$

- si x est un noeud de cet arbre et y est un noeud du sous-arbre droit de x , alors il faut que

$$y.valeur \geq x.valeur$$

1. Parmi les trois arbres dessinés ci-dessous, recopier sur la copie le numéro correspondant à celui qui n'est pas un arbre binaire de recherche. Justifier.



Corrigé (1 pt)

L'arbre 3 n'est pas un arbre binaire de recherche, car 20 est situé dans le sous-arbre droit du noeud 29. Or tous les noeuds de l'arbre droit de 29 doivent être supérieur à 29.

Une classe ABR, qui implémente une structure d'arbre binaire de recherche, possède l'interface suivante :

```

class ABR:
    def __init__(self, valeur, sa_gauche=None, sa_droite=None):
        self.valeur= valeur #valeur de la racine
        self.sa_gauche #sous-arbre gauche
        self.sa_droit #sous-arbre droit
    def inserer_noeud(self, valeur):
        """Renvoie un nouvel ABR avec le noeud de valeur 'valeur'
        inséré comme nouvelle feuille à sa position correcte
        """

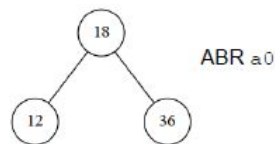
```

On prendra la valeur **None** pour représenter un sous-arbre vide.

2. La construction d'un ABR se fait en insérant progressivement les valeurs à partir de la racine : la méthode *insérer_noeud* place ainsi un noeud à sa "bonne place" comme feuille dans la structure, sans modifier le reste de la structure. On admet que la position de cette feuille est unique.

(a) En utilisant les méthodes de la classe ABR :

- écrire l'instruction Python qui permet d'instancier un objet **a0**, de type ABR, ayant un seul noeud (la racine) de valeur 18.
- écrire une séquence d'instructions qui permet ensuite d'insérer dans l'objet **a0** les deux feuilles de l'arbre de valeurs 12 et 36.



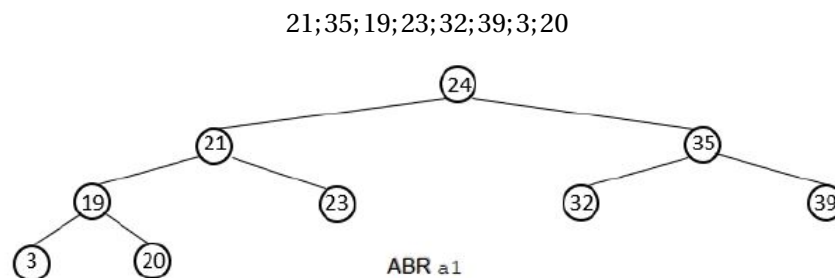
Corrigé (1 pt)

```

a0 = ABR(18, None, None)
a0.inserer_noeud(12)
a0.inserer_noeud(36)

```

Selon l'ordre dans lequel les valeurs sont insérées, on construit des ABR ayant des structures différentes. Voilà par exemple ci-dessous un ABR (nommé **a1**) obtenu en créant une instance de type ABR ayant un seul noeud (la racine) de valeur 24 puis en insérant successivement les valeurs dans l'ordre suivant :

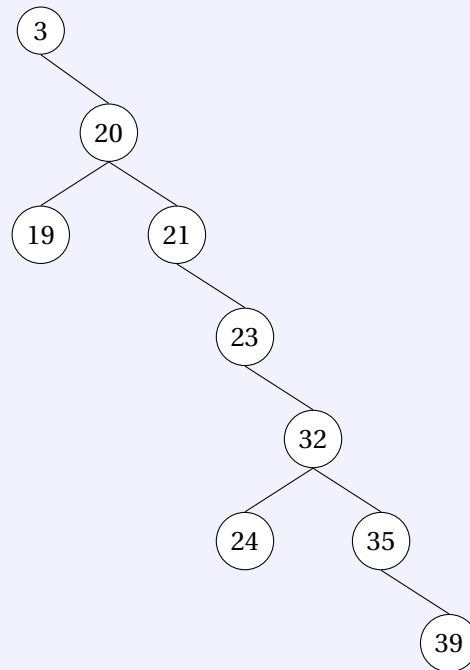


(b) Dessiner sur la copie l'ABR (nommé **a2**) que l'on obtiendrait en créant une instance de type ABR ayant un seul noeud (la racine) de valeur 3 puis en insérant successivement les valeurs dans l'ordre suivant :

20;19;21;23;32;24;35;39



Corrigé (1.5 pt)



(c) Donner la hauteur des ABR **a1** et **a2**.



Corrigé (0.5 pt)

| L'arbre **a1** a pour hauteur 4. L'arbre **a2** a pour hauteur 7.

(d) On complète la classe ABR avec une méthode *calculer_hauteur* qui renvoie la hauteur de l'arbre.

Recopier sur la copie les lignes 10 et 13 en les complétant par des commentaires et la ligne 14 en la complétant par une instruction dans le code ci-après de cette méthode.

On pourra utiliser la fonction Python `max` qui prend en paramètres deux nombres et renvoie le maximum de ces deux nombres.

```

1 def calculer_hauteur(self) :
2     """Renvoie la hauteur de l'arbre"""
3     if self.sa_droit is None and self.sa_gauche is None:
4         #l'arbre est réduit à une feuille
5         return 1
6     elif self.sa_droit is None:
7         #arbre avec une racine et seulement un sous-arbre gauche
8         return 1+self.sa_gauche.calculer_hauteur()
9     elif self.sa_gauche is None:
10        #A COMPLETER
11        return 1+self.sa_droit.calculer_hauteur()
12    else:
13        #A COMPLETER
14        return A COMPLETER
  
```



| Corrigé (2 pts)

```

1 def calculer_hauteur(self):
2     """Renvoie la hauteur de l'arbre"""
3     if self.sa_droit is None and self.sa_gauche is None:
4         #l'arbre est réduit à une feuille
5         return 1
6     elif self.sa_droit is None:
7         #arbre avec une racine et seulement un sous-arbre gauche
8         return 1+self.sa_gauche.calculer_hauteur()
9     elif self.sa_gauche is None:
10        #arbre avec une racine et seulement un sous-arbre droit
11        return 1+self.sa_droit.calculer_hauteur()
12    else:
13        #arbre avec une racine et deux sous-arbres gauche et droit
14        return 1 + max(self.sa_gauche.calculer_hauteur()
15                       , self.sa_droit.calculer_hauteur())

```

3. La différence de hauteur entre l'ABR **a1** et l'ABR **a2** aura des conséquences lors de la recherche d'une valeur dans l'ABR.

(a) Recopier et compléter sur la copie les lignes 6, 8, 11 et 13 du code ci-dessous de la méthode *rechercher_valeur*, qui permet de tester la présence ou l'absence d'une valeur donnée dans l'ABR :

```

1 def rechercher_valeur(self, v):
2     """
3     Renvoie True si la valeur v est trouvée dans l'ABR
4     False sinon
5     """
6     if A COMPLETER
7         return True
8     elif A COMPLETER and self.sa_gauche is not None:
9         return self.sa_gauche.rechercher_valeur(v)
10    elif v>self.valeur and self.sa_droit is not None:
11        return A COMPLETER
12    else:
13        return A COMPLETER

```



Corrigé (2 pts)

```

1 def rechercher_valeur(self, v):
2     """
3     Renvoie True si la valeur v est trouvée dans l'ABR
4     False sinon
5     """
6     if self.valeur==v:
7         return True
8     elif v<self.valeur and self.sa_gauche is not None:
9         return self.sa_gauche.rechercher_valeur(v)
10    elif v>self.valeur and self.sa_droit is not None:
11        return self.sa_droit.rechercher_valeur(v)
12    else:
13        return False

```

(b) On admet que le nombre de fois où la méthode *rechercher_valeur* est appelée pour rechercher la valeur 39 dans l'ABR **a2** est 7.

Donner le nombre de fois où la méthode *rechercher_valeur* est appelée pour rechercher la valeur 20 dans l'ABR **a1**.

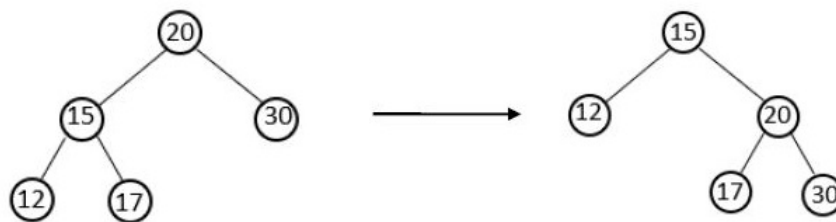


Corrigé (1 pt)

| la méthode *rechercher_valeur* est appelée 4 fois pour rechercher la valeur 20.

4. Il existe des algorithmes pour modifier la structure d'un ABR, afin par exemple de diminuer la hauteur d'un ABR; on s'intéresse aux algorithmes appelés rotation, consistant à faire "pivoter" une partie de l'arbre autour d'un de ses noeuds.

L'exemple ci-dessous permet d'expliquer l'algorithme pour réaliser une rotation droite d'un ABR autour de sa racine :



<p>On appelle <i>pivot</i> le sous-arbre gauche de la racine de l'arbre</p>	
<p>Le sous-arbre droit du pivot devient le sous-arbre gauche de la racine</p>	
<p>La racine ainsi modifiée devient le sous-arbre droit du pivot et la racine du pivot devient la nouvelle racine de l'ABR</p>	

On admet que ces transformations conservent la propriété d'ABR de l'arbre.

La méthode *rotation_droite* ci-après renvoie une nouvelle instance de type ABR, correspondant à une rotation droite de l'objet de type ABR à partir duquel elle est appelée.

```

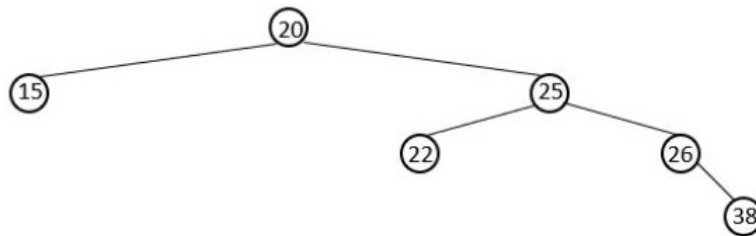
1 def rotation_droite(self):
2     """Renvoie une instance d'un ABR apres une rotation droite
3     On suppose qu'il existe un sous-arbre gauche"""
4
5     pivot=self.sa_gauche
6     self.sa_gauche=pivot.sa_droit
7     pivot.sa_droit=self
8     return ABR(pivot.valeur,pivot.sa_gauche,pivot.sa_droit)

```

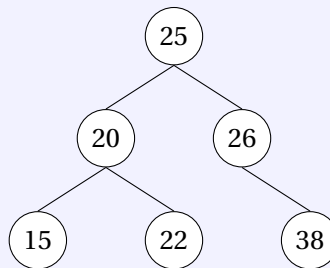
Pour réaliser une rotation gauche, on suivra alors l'algorithme suivant :

- on appelle pivot le sous-arbre droit de la racine de l'arbre,
- le sous-arbre gauche du pivot devient le sous-arbre droit de la racine,
- la racine ainsi modifiée devient le sous-arbre gauche du pivot et la racine du pivot devient la nouvelle racine de l'ABR

- (a) En suivant les différentes étapes de cet algorithme, dessiner l'arbre obtenu après une rotation gauche de l'ABR suivant :



Corrigé (1 pt)



- (b) Écrire le code d'une méthode Python *rotation_gauche* qui réalise la rotation gauche d'un ABR autour de sa racine.



Corrigé (2 pts)

```

1 def rotation_gauche(self):
2
3     pivot=self.sa_droit
4     self.sa_droit=pivot.sa_gauche
5     pivot.sa_gauche=self
6     return ABR(pivot.valeur,pivot.sa_gauche,pivot.sa_droit)

```

5. Écrire le code de la méthode récursive Python *insérer_noeud*.

**Corrigé (2 pts)**

```
1 def inserer_noeud (self, valeur) :
2
3     if valeur < self.valeur :
4         if self.sa_gauche == None :
5             self.sa_gauche = ABR(valeur)
6         else :
7             self.sa_gauche.inserer_noeud(valeur)
8     else :
9         if self.sa_droit == None :
10            self.sa_droit = ABR(valeur)
11        else :
12            self.sa_droit.inserer_noeud(valeur)
```

↔ **Fin du devoir** ↔