Séquence 5

La fonction logarithme népérien

Sommaire

Dans cette séquence, on introduit une nouvelle fonction : la fonction logarithme népérien.

Comme la fonction exponentielle à laquelle elle est liée, c'est une fonction essentielle en mathématiques et, par ses nombreuses applications biologiques et économiques, elle a aussi un rôle important dans la vie quotidienne.

1 Pré-requis

A Généralités sur les fonctions

Dans cette séquence, plusieurs notions sur les fonctions doivent être connues.

1. Limites

- Limites des fonctions de référence (fonctions carré, cube, racine, et leurs inverses) aux bornes de leurs ensembles de définition.
- Règles opératoires et formes indéterminées.
- Composition.
- Limites et inégalités : théorèmes de comparaison et compatibilité avec l'ordre.

2. Continuité

Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire dans le cas d'une fonction strictement monotone.

3. Dérivation

- Définition de la dérivabilité en un point.
- Dérivées des fonctions de référence.
- Opérations.
- Liens entre le sens de variation d'une fonction sur un intervalle I et le signe de sa dérivée sur I.

B Fonction exponentielle

Le cours sur la fonction exponentielle doit être connu. Voici un exercice-test concernant les principaux résultats.

Exercice Vrai/Faux

Pour chacune des propositions suivantes, dites si elle est vraie ou fausse. Dans le cas où elle est fausse, proposez une modification qui la rende vraie.

a. La fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^x$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et transforme une somme en un produit.

b. L'équation $\exp(x)=0$ admet une unique solution strictement positive.

c. La dérivée de la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;0\right[$.

d. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

e. La dérivée de la fonction $f: x\mapsto \mathrm{e}^x-1$ est telle que $f'(x)=\mathrm{e}^x$ donc f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$; par conséquent, il existe un seul nombre réel $x_0\geq 0$ tel que $f(x_0)=0$.

f. Pour tout $x\in]-\infty\,;0[$, $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}=1$.

g. On a $\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)^3=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}+3}$.

h. Sur $\left]0\,;+\infty\right[$, la dérivée de la fonction f: $x\mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ est f' : $x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$.

i. Une équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 2 est $y=\mathrm{e}^2(x-1)$.

j. Le tableau de variation de la fonction exponentielle est :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
$\exp(x)$	0	0	$+\infty$

▶ **Solution**

a. Vrai. On peut aussi définir la fonction f sur $\mathbb{R}$ tout entier.

b. Faux. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x>0$ donc l'équation $\mathrm{e}^x=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

c. Vrai. La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle elle-même, qui est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $\left]-\infty\,;0\right[$ aussi.

d. Vrai. Toute fonction dérivable sur I est continue sur I. La fonction exponentielle qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par définition) n'échappe pas à cette règle.

e. Vrai. On peut même ajouter que $x_0=0$.

f. Vrai. L'égalité $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}=1$ est même vraie pour tout réel x.

g. Vrai. En effet, on calcule séparément $\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)^3=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\times 3}=\mathrm{e}^{\frac{9}{2}}$,

puis $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}+3}=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}+\frac{6}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{9}{2}}$.

Toutefois, dans le cas général de nombres réels x et y quelconques, on a : $\left(e^x\right)^y \neq e^{x+y}$ sauf dans les cas « exceptionnels » où $x \times y = x + y$ (comme ici, où $x = \frac{3}{2}$ et $y = 3$ on vérifie que $x + y = \frac{9}{2} = x \times y$).

h. Faux. En posant $u(x) = \sqrt{x}$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$, on a $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$.

i. Vrai. En effet, on sait qu'une équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 2 est $y = \exp'(2)(x-2) + \exp(2) = e^2(x-2) + e^2 = e^2(x-1)$.

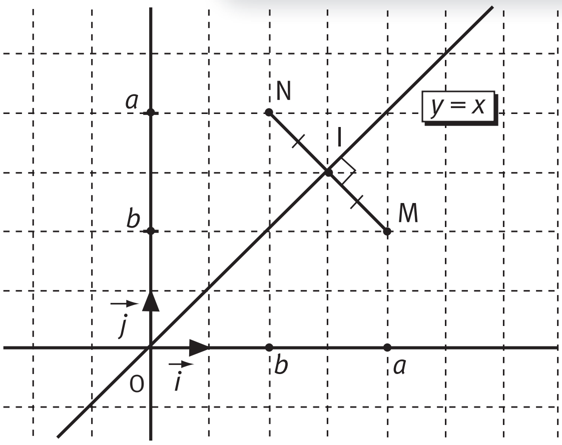
j. Faux. Il suffit d'échanger les valeurs 1 et 0 données pour x et $\exp(x)$ pour corriger l'erreur. Précisément, le tableau de variations de la fonction exponentielle est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
$\exp(x)$	0 ↗	1	↗ $+\infty$

C Symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$

Propriété

Soient a et b deux nombres réels. Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, les points $M(a\,;b)$ et $N(b\,;a)$ sont symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



■ *Démonstration*

Il suffit de montrer que le milieu I du segment $[MN]$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que les droites $\mathscr{D}$ et (MN) sont perpendiculaires.

- Les coordonnées du point I sont $\left(\dfrac{a+b}{2}\,;\dfrac{b+a}{2}\right)$ donc le point I appartient bien à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
- Montrons que les droites sont perpendiculaires en utilisant le produit scalaire.

On a $\overrightarrow{MN}(b-a\,;a-b)$ et le vecteur $\vec{v}(1;1)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$. Comme $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{v}=(b-a)\times 1+(a-b)\times 1=0$ les deux droites sont bien perpendiculaires.

D Logique : contraposée

On appelle « proposition » un énoncé qui peut être vrai ou faux.

Quand une proposition est de la forme « si… alors… », on dit qu'il s'agit d'une proposition conditionnelle.

Quand on sait qu'une proposition est vraie, on l'appelle « propriété ».

Définition

Soit A et B deux propositions, on considère la proposition $\mathcal{P}$ « A implique B » c'est-à-dire « si A est vraie alors B est vraie ».

On note nonA la négation (la proposition contraire) de A et nonB la négation de B.

La proposition **contraposée** de $\mathcal{P}$ est « nonB implique nonA » c'est-à-dire « si B est fausse alors A est fausse ».

Propriété

Une proposition conditionnelle et sa contraposée sont vraies en même temps : si l'une est vraie, l'autre est vraie aussi. Elles sont donc toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses.

2 Définition et propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

A Objectifs du chapitre

On définit ici la fonction logarithme népérien, une des fonctions essentielles des mathématiques.

On étudie ses propriétés algébriques, c'est-à-dire les propriétés de la fonction logarithme népérien lorsqu'on utilise les opérations $+, -, \times, \div$. On étudie aussi des équations et des inéquations où la fonction logarithme népérien intervient.

Début du premier chapitre du livre de Neper :
Mirifici Logarithnorum Canonis Descriptio - 1614.


MIRIFICI
LOGARITHMORVM
CANONIS DESCRIPTIO,
EIVSQVE VSVS IN VTRAQVE TRIGO-
nometria, vt etiam in omni Logiſtica Mathemati-
ca, ampliſſimi, facillimi, & expeditiſſimi explicatio.

LIBER PRIMVS.

DE DEFINITIONIBVS.

CAP. I.

Definitio 1.

LINEA æqualiter creſcere dicitur, quum punctus eam deſcribens, æqualibus momentis per æqualia interualla progreditur.

Sit punctus A, à quo ducenda ſit linea fluxu alterius puncti, qui ſit B. fluat ergo primo momento B ab A in C. Secundo momento à C in D. Tertio momento à D in E. atque ita deinceps in infinitum deſcribendo lineam A C D E F, &c. inter

B Pour débuter

■ Activité 3 Un peu d'histoire

Au début du dix-septième siècle, le besoin de faire beaucoup de calculs (en astronomie, navigation, économie (où on est amené à chercher n (k étant donné) dans des relations de la forme $\left(1+\frac{t}{100}\right)^n = k$ pour connaître l'évolution de placements d'argent à intérêts composés) pousse à chercher des moyens pour faciliter ces calculs, notamment les multiplications et les puissances.

L'idée de remplacer les produits par des sommes commence à circuler. Une technique est connue par les astronomes arabes au X^{e} siècle, basée sur la trigonométrie. L'exemple ci-dessous utilisant la formule $\sin\alpha \times \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

est proposé par Jean-Pierre Friedelmeyer dans Histoires de logarithmes, Commission Inter-Irem d'Epistémologie et d'histoire des Mathématiques.

Voici un exemple de calcul.

Soit à multiplier $A = 50{,}8791$ et $B = 207{,}343$.

On pose $A \cdot B = 10^n \cdot a \cdot b = 10^n \sin\alpha \cdot \sin\beta$ avec $a = \sin\alpha$ et $b = \sin\beta$; avec une table trigonométrique à six chiffres, cela donne $n = 5$; $a = 0{,}508791$; $b = 0{,}207343$.

Donc :

$\alpha = 30°35'$	$\text{Cos}(\alpha - \beta) = 0{,}947676$
$\beta = 11°58'$	$\text{Cos}(\alpha + \beta) = 0{,}736687$
$\alpha - \beta = 18°37'$	différence $0{,}210989$
$\alpha + \beta = 42°33'$	$\sin\alpha.\sin\beta = 0{,}105494$

D'où $\alpha.\beta = 10549{,}4$

Les mathématiciens, les utilisateurs de calculs, avaient observé depuis longtemps le rapport entre les suites géométriques et arithmétiques : dans une suite géométrique, les exposants forment une suite arithmétique. Pour faire des multiplications il suffit de faire des sommes sur les exposants d'après la relation $a^n \times a^{n'} = a^{n+n'}$.

Voici l'exemple de la suite géométrique de terme général $1{,}1^n$ et de la suite arithmétique de terme général n.

Table de valeurs n°1

$1{,}1^n$	1	1,1	1,21	1,331	1,4641	1,61051	1,77156	1,94872	2,14359	2,35795	2,59374	2,85312	3,13843	3,45227	3,79750	4,17725	4,59497
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Les valeurs indiquées dans la première ligne du tableau sont des valeurs approchées à partir de la sixième valeur.

Montrons comment on peut faire des calculs avec cette table de valeurs en donnant l'exemple d'une multiplication et d'une puissance :

- $1{,}4641 \times 1{,}61051 \approx 2{,}35795$ car il s'agit de $1{,}1^4 \times 1{,}1^5 = 1{,}1^9$. Au lieu de multiplier les deux nombres décimaux, on a ajouté les exposants $4+5=9$, et on a lu dans la première ligne de la table la valeur correspondant à la valeur 9 de la deuxième ligne.

× résultat

$1{,}1^n$	1	1,1	1,21	1,331	1,4641	1,61051	1,77156	1,94872	2,14359	2,35795	2,59374	2,85312	3,13843	3,45227	3,79750	4,17725	4,59497
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

+

- $1{,}4641^3 \approx 3{,}138433$ car $1{,}4641^3 = \left(1{,}1^4\right)^3 = 1{,}1^{3\times 4} = 1{,}1^{12} \approx 3{,}138433$.

Elever au cube correspond à multiplier entre eux trois nombres égaux, on ajoute donc 3 nombres égaux de la deuxième ligne, ce qui correspond à une multiplication par 3.

$1{,}1^n$	1	1,1	1,21	1,331	1,4641	1,61051	1,77156	1,94872	2,14359	2,35795	2,59374	2,85312	3,13843	3,45227	3,79750	4,17725	4,59497
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Sur la première ligne de la table de valeurs n°1 sont indiquées les puissances de 1,1. Mais bien sûr ce qui est intéressant c'est d'avoir des valeurs quelconques sur cette première ligne. On propose ci-dessous une table de valeurs plus complète où les valeurs de x sont données avec un pas égal à 0,1, la fonction f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que l'égalité $f(a\times b) = f(a) + f(b)$ est toujours vraie. On expliquera dans le chapitre 4 comment est fabriquée cette fonction.

Les valeurs de la première table s'intercalent dans cette deuxième table comme on le voit avec les deux premières valeurs et l'avant dernière qui donne $f(x) = 15{,}000$.

Table de valeurs n°2

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
$f(x)$	0	1	1,913	2,753	3,3530	4,254	4,931	5,567	6,167	6,734	7,273	7,784	8,273	8,739	9,185	9,614	10,025

x	2,7	2,8	2,9	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4	4,1	4,17725	4,2
$f(x)$	10,421	10,803	11,171	11,527	11,871	12,204	12,527	12,840	13,144	13,440	13,727	14,007	14,279	14,545	14,804	15,000	15,057

Les valeurs données pour $f(x)$ sont des valeurs approchées.

1. Vérifier la formule $f(a\times b) = f(a) + f(b)$ avec $a = 2$ et $b = 1{,}5$; avec $a = 1{,}4$ et $b = 3$; avec $a = 1{,}8$ et $b = 1{,}2$.

2. Imaginez que votre calculatrice est en panne ou que vous êtes au lycée (ou ingénieur, astronome…) avant 1980… et que vous ne savez plus multiplier « à la main » les nombres décimaux ou que vous cherchez un moyen de calcul plus simple que la multiplication.

   En utilisant cette table de valeurs donner une valeur approchée de

   $$1{,}9\times 2{,}2 \ ; \ 1{,}2\times 1{,}6\times 1{,}7 \ ; \ 1{,}9^2 \ ; \ 1{,}2^5 \ ; \ 1{,}2^3\times 1{,}5^2.$$

3. Conjecturer un moyen pour calculer un quotient $\dfrac{a}{b}$ et proposer une valeur approchée de $\dfrac{4{,}1}{3{,}2}$.

4. Conjecturer un moyen pour déterminer une racine carrée $\sqrt{a}$ et proposer une valeur approchée de $\sqrt{1{,}7}$.

Les logarithmes apparaissent en 1614 quand l'écossais John Neper publie son livre *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio.*

Les logarithmes crées par Neper ne sont pas tout à fait les logarithmes que nous nommons aujourd'hui logarithme népériens en son honneur mais ils en sont très proches.

On peut essayer de s'imaginer la vie en Ecosse en 1614 et, pour essayer d'apprécier l'apport de cette invention, penser qu'en mathématiques les notions de fonction, dérivée, exponentielle étaient inconnues et que, en pratique, même l'écriture des nombres décimaux était très récente et pas encore fixée avant Neper.

(On utilisait, par exemple, des fractions au lieu décrire des chiffres à droite de la virgule. L'écriture positionnelle des décimaux est décrite par le flamand Simon Stevin en 1586 seulement dans les 17 pages de son livre La Dîme.)

Une des avancées de Neper est d'avoir pensé et utilisé un exposant qui n'est pas un entier mais qui est une variable réelle puisqu'il a interprété l'exposant comme une quantité liée au temps, les deux suites, arithmétique et géométrique, qu'il a utilisées correspondant à des distances parcourues par des points mobiles.

Bien sûr nous en ferons ici une présentation moderne.

C Cours

1. Définitions

Définition 1

Une fonction f définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J est appelée bijection de I dans J si tout réel b de l'intervalle J admet un et un seul antécédent a dans I par f, $b = f(a)$.

▶ Exemple 1

La fonction carré est une bijection de $[0\,;+\infty[$ dans $[0\,;+\infty[$ car, pour tout nombre b de $[0\,;+\infty[$ il existe un et un seul nombre a dans $[0\,;+\infty[$ tel que $a^2 = b$ (ce nombre est noté $\sqrt{b}$).

La fonction carré n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $[0\,;+\infty[$ car, pour tout nombre b de $[0\,;+\infty[$, il existe, dans $\mathbb{R}$, deux nombres solutions de l'équation $x^2 = b$, ce sont $\sqrt{b}$ et $-\sqrt{b}$.

Définition 2

Soit f une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle J. On appelle bijection réciproque de f la fonction g définie sur l'intervalle J et à valeurs dans l'intervalle I telle que $a = g(b)$ si et seulement si $b = f(a)$.

▸ Exemple 2 La fonction carré étant une bijection de $[0\,;+\infty[$ dans $[0\,;+\infty[$, elle a une fonction réciproque, c'est la fonction racine carrée.

$$\begin{tikzcd} a=\sqrt{b} \arrow[r, bend left, "\text{carré}"] & b=a^2 \arrow[l, bend left, "\text{racine}"] \end{tikzcd}$$

Remarque Dans un repère orthonormé, la courbe de la fonction racine est la courbe symétrique de la courbe de la fonction carré définie sur $[0\,;+\infty[$ par rapport à la droite d'équation $y=x$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction exponentielle étant définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, les limites étant $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, tout réel b de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ admet un et un seul antécédent a dans $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle, $b=e^a$. La fonction exponentielle est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$.

Définition 3

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la bijection réciproque de la fonction exponentielle.

$$\exp : \mathbb{R} \to\,]0\,;+\infty[\qquad a \mapsto e^a = b$$

$$\begin{tikzcd} a=\ln b \arrow[r, bend left, "\exp"] & b=e^a \arrow[l, bend left, "\ln"] \end{tikzcd}$$

$$\ln :]0\,;+\infty[\, \to \mathbb{R} \qquad b \mapsto \ln b = a$$

▸ Conséquence La fonction ln est une bijection de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Propriété 1

Pour tout a de $\mathbb{R}$, $\ln\left(e^a\right) = a$.

Pour tout b de $]0\,;+\infty[$, $e^{\ln b} = b$.

$$\begin{tikzcd} a=\ln b=\ln e^a \arrow[r, bend left, "\exp"] & b=e^a=e^{\ln b} \arrow[l, bend left, "\ln"] \end{tikzcd}$$

Notation

L'image de x par la fonction logarithme népérien se note traditionnellement $\ln x$. Des parenthèses sont indispensables si la fonction logarithme népérien s'applique à une somme ou un produit : $\ln(x+3)$ ou $\ln(2x)$; elles sont parfois omises dans le cas des quotients : $\ln\dfrac{3}{x}$. L'usage des calculatrices amène à utiliser davantage l'écriture $\ln(x)$, cette écriture étant plus cohérente avec $f(x)$. Ces notations sont analogues à celles rencontrées en trigonométrie.

Propriété 2

Pour tout réel a strictement positif et tout réel b quelconque :

$$b = \ln a \Leftrightarrow a = \mathrm{e}^{b}.$$

Démonstration

C'est une conséquence directe de la définition ce qui est illustré par le schéma.

Valeurs particulières

$\ln 1 = 0$	$\ln \mathrm{e} = 1$
$\mathrm{e}^0 = 1 \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \ln 1 = 0$	$\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \ln \mathrm{e} = 1$

Propriété 3

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

Démonstration

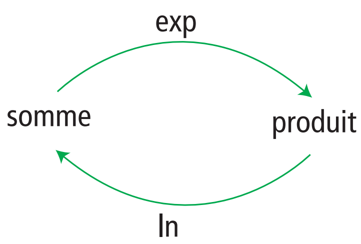
Soit a et b deux réels strictement positifs. Pour justifier que la proposition $\mathcal{P}$ « si $a < b$ alors $\ln a < \ln b$ » est vraie, on utilise la proposition contraposée « si $\ln a \geq \ln b$ alors $a \geq b$ » qui peut aussi s'écrire « si $\ln a \geq \ln b$ alors $\mathrm{e}^{\ln a} \geq \mathrm{e}^{\ln b}$ » d'après la propriété 2. Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, l'implication « si $\ln a \geq \ln b$ alors $\mathrm{e}^{\ln a} \geq \mathrm{e}^{\ln b}$ » est vraie, donc la contraposée de $\mathcal{P}$ est vraie, donc $\mathcal{P}$ est vraie.

2. Propriétés algébriques

$$\text{somme} \xrightarrow{\exp} \text{produit}$$

Rappelons la relation fonctionnelle de l'exponentielle : pour tous réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Ce qui signifie que l'image d'une somme par la fonction exponentielle est un produit d'exponentielles. La fonction exponentielle transforme les sommes en produits.



On peut donc penser que, pour le logarithme népérien qui est la fonction réciproque de la fonction exponentielle, la propriété correspondante est vérifiée : l'image d'un produit par la fonction logarithme est une somme de logarithmes. La fonction logarithme népérien transforme les produits en sommes.

Théorème 1

Pour tous réels a et b dans $]0\,;+\infty[$, $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$.

Cette égalité est appelée **« relation fonctionnelle de la fonction logarithme népérien ».**

On retiendra que *la fonction logarithme transforme les produits en somme*.

Démonstration

Pour montrer que ces deux nombres sont égaux, il suffit de montrer que leurs exponentielles sont égales car pour tous réels x et y, $x=y \Leftrightarrow e^x=e^y$.

On a $e^{\ln(a\times b)}=a\times b$ et aussi $e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln a}\times e^{\ln b}=a\times b$. L'égalité du théorème est donc bien prouvée.

Comme pour la fonction exponentielle, on déduit de ce théorème d'autres égalités pour les inverses, les quotients, les puissances, les racines carrées.

Propriété 4

Pour tous réels a et b dans $]0\,;+\infty[$ et n dans $\mathbb{Z}$:

- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$;
- $\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)=\ln b-\ln a$;
- $\ln\left(a^n\right)=n\ln a$;
- $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\ln a$.

Démonstration

- Pour tout réel a dans $]0\,;+\infty[$: $a\times\dfrac{1}{a}=1$ donc $\ln\left(a\times\dfrac{1}{a}\right)=\ln 1$, soit $\ln a+\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=0$. Donc $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$.

- Pour tous réels a et b dans $]0\,;+\infty[$:

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right)=\ln\left(b\times\frac{1}{a}\right)=\ln b+\ln\left(\frac{1}{a}\right)=\ln b-\ln a.$$

- Soit un réel a dans $]0\,;+\infty[$. Démontrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a : $\ln\left(a^n\right)=n\ln a$.
  - *Initialisation* : l'égalité est vraie pour $n=1$.
  - *Hérédité* : soit k un entier naturel, $k\geq 1$, pour lequel on suppose que $\ln\left(a^k\right)=k\ln a$. On a alors $\ln\left(a^{k+1}\right)=\ln\left(a^k\times a\right)=\ln\left(a^k\right)+\ln(a)$ d'après la propriété du théorème sur le logarithme du produit de deux nombres. Et donc $\ln\left(a^{k+1}\right)=\ln\left(a^k\right)+\ln(a)=k\ln a+\ln a=(k+1)\ln a$. La propriété est donc héréditaire.
  - *Conclusion* : pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a : $\ln\left(a^n\right)=n\ln a$.

    Pour $n=0$: $\ln\left(a^0\right)=\ln 1=0=0\times\ln a$.

    Considérons un entier strictement négatif et écrivons-le $-n$ (alors n est dans $\mathbb{N}^*$),

    on a : $\ln\left(a^{-n}\right)=\ln\left(\frac{1}{a^n}\right)=-\ln\left(a^n\right)=-\left(n\ln a\right)=(-n)\ln a$.

    L'égalité est donc prouvée pour tout entier n dans $\mathbb{Z}$.

- Pour tout réel a dans $]0\,;+\infty[$: $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$ donc $\ln\left(\sqrt{a}\times\sqrt{a}\right)=\ln a$, soit $\ln\sqrt{a}+\ln\sqrt{a}=2\ln\sqrt{a}=\ln a$. Donc $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln a$.

▶ Exemple 3 — Exprimer les nombres suivants à l'aide de ln 2 et de ln 3 :

$$\ln 4,\ \ln(-4)^2,\ \ln 36,\ \ln(\sqrt{6}),\ \ln\left(\frac{9}{8}\right),\ \ln\left(16\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

▶ **Solutions** — On a : $\ln 4=\ln(2^2)=2\ln 2$;

$\ln(-4)^2=\ln 16=\ln(2^4)=4\ln 2$;

$\ln 36=\ln(4\times 9)=\ln 4+\ln 9=\ln(2^2)+\ln(3^2)=2\ln 2+2\ln 3$;

$\ln\left(\sqrt{6}\right)=\frac{1}{2}\ln 6=\frac{1}{2}\ln(2\times 3)=\frac{\ln 2+\ln 3}{2}$;

$$\ln\left(\frac{9}{8}\right)=\ln 9-\ln 8=\ln(3^2)-\ln(2^3)=2\ln 3-3\ln 2\,;$$

$$\ln\left(16\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\ln 16+\ln\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\ln(2^4)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)=4\ln 2+\frac{\ln 2-\ln 3}{2}$$

$$=\frac{9}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3.$$

Remarque Dans le calcul de $\ln(-4)^2$ on n'a pas pu utiliser la propriété sur $\ln\left(a^n\right)$ car cette propriété ne peut s'appliquer que si a est strictement positif ce qui n'est pas le cas de -4.

3. Équations, inéquations

a) Équations

Propriété 5

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$$\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b.$$

■ *Démonstration*

Cette équivalence est la traduction du mot « bijection ».

La fonction ln est une bijection de $\left]0\,;+\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$, donc deux nombres différents ne peuvent pas avoir la même image par la fonction ln, d'où l'implication $\ln a=\ln b \Rightarrow a=b$. L'implication réciproque et vraie, bien sûr, donc l'équivalence $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$ est prouvée.

Remarque L'utilisation simultanée de la fonction ln et de la fonction exponentielle, bijections réciproques l'une de l'autre, permet de résoudre des équations où il n'y a qu'un seul logarithme ou qu'une seule exponentielle. *L'application de la fonction ln fait disparaître l'exponentielle et l'application de la fonction exponentielle fait disparaître le logarithme comme on l'a vu dans la propriété 1.*

Propriété 6

1. Pour tout réel k, l'équation $\ln x=k$ admet une unique solution dans $\left]0\,;+\infty\right[$: $x=\mathrm{e}^k$.

$$\ln x=k \Leftrightarrow x=\mathrm{e}^k.$$

2. Si $k>0$ l'équation $\mathrm{e}^x=k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$: $x=\ln k$.

$$\mathrm{e}^x=k \Leftrightarrow x=\ln k.$$

3. Si $k\leq 0$, l'équation $\mathrm{e}^x=k$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

❶ En appliquant la fonction exponentielle aux deux termes de l'expression $\ln x = k$ on obtient : $\ln x = k \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^k \Leftrightarrow x = e^k$.

❷ De même $e^x = k \Leftrightarrow \ln e^x = \ln k \Leftrightarrow x = \ln k$.

▶ Exemple 4

❶ Pour quelles valeurs de x, $\ln\big(x(x+1)\big)$ est-il défini ?

❷ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln\big(x(x+1)\big) = \ln 30$.

❸ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln\left(x^2+1\right) = 7$.

❹ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x\left(e^x+1\right) = 12$.

▶ **Solution**

❶ Le nombre $\ln\big(x(x+1)\big)$ est défini si et seulement si : $x(x+1) > 0$. Le trinôme du second degré $x(x+1)$ est négatif si et seulement si x est compris entre les deux racines -1 et 0.

Ainsi $\ln\big(x(x+1)\big)$ est défini si et seulement si :

$$x \in D \text{ avec } D = \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[.$$

❷ La fonction ln étant bijective, on a pour $x \in D$:

$$\ln\big(x(x+1)\big) = \ln 30 \Leftrightarrow x(x+1) = 30 \Leftrightarrow x^2 + x - 30 = 0.$$

Résolvons cette équation du second degré.

On a : $\Delta = 1 - 4 \times (-30) = 121 = 11^2$.

Il y a donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{-1+11}{2} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-1-11}{2} = -6$.

Ces deux réels sont éléments de D donc l'ensemble des solutions de l'équation $\ln\big(x(x+1)\big) = \ln 30$ est : $S = \{-6\,;5\}$.

❸ Pour tout réel x, x^2+1 est strictement positif et $\ln\left(x^2+1\right)$ existe. Donc, pour tout réel x, on a : $\ln\left(x^2+1\right) = 7 \Leftrightarrow x^2+1 = e^7 \Leftrightarrow x^2 = e^7 - 1$.

La fonction exponentielle étant strictement croissante, on a $e^7 > e^0$ donc $e^7 - 1 > 0$

et : $\ln\left(x^2+1\right) = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt{e^7-1}$ ou $x = -\sqrt{e^7-1}$.

$$S = \left\{\sqrt{e^7-1}\,;-\sqrt{e^7-1}\right\}.$$

❹ La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$. Donc, pour tout réel x, on a :

$$e^x\left(e^x+1\right) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X(X+1) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 + X - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X = -4 \text{ ou } X = 3 \end{cases}$$

(en résolvant l'équation du second degré).

Ainsi : $e^x\left(e^x+1\right) = 12 \Leftrightarrow e^x = -4$ ou $e^x = 3 \Leftrightarrow e^x = 3$ car la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives.

Et donc : $e^x\left(e^x+1\right) = 12 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

$$S = \{\ln 3\}.$$

b) Inéquations

Propriété 7

Pour tous réels a et b strictement positifs : $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

■ *Démonstration*

La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ (propriété 4), donc $a < b \Rightarrow \ln a < \ln b$.

L'implication réciproque $\ln a < \ln b \Rightarrow a < b$ est vraie car sa contraposée, $a \geq b \Rightarrow \ln a \geq \ln b$, est vraie d'après le sens de variation de la fonction ln.

Remarque On a bien sûr aussi une équivalence avec des inégalités larges $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$.

Nous pouvons aussi préciser maintenant des équivalences sur des inégalités mettant en jeu des logarithmes et des exponentielles

Propriété 8

a) Pour tout réel k et tout réel x strictement positif : $\ln x < k \Leftrightarrow x < e^k$.

b) Pour tout réel λ strictement positif et pour tout réel x : $e^x < \lambda \Leftrightarrow x < \ln \lambda$.

■ *Démonstration*

a) Pour démontrer cette équivalence, on peut utiliser ce qui précède en écrivant $k = \ln e^k$. On obtient l'équivalence $\ln x < \ln e^k \Leftrightarrow x < e^k$ qui est vrai d'après la propriété 7.

b) En posant $\lambda = e^{\ln \lambda}$, l'équivalence à prouver devient $e^x < e^{\ln \lambda} \Leftrightarrow x < \ln \lambda$ ce qui est vrai d'après les propriétés de l'exponentielle.

Remarque Chaque implication peut aussi se prouver en utilisant la réciprocité des fonctions exp et ln ainsi que leur stricte croissance sur leur ensemble de définition.

Par exemple l'implication « pour tout réel k et tout réel x strictement positif $\ln x < k \Rightarrow x < e^k$ » est justifiée par le fait que, la fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $\ln x < k \Rightarrow e^{\ln x} < e^k$ et, comme $e^{\ln x} = x$, on obtient bien : $\ln x < k \Rightarrow x < e^k$.

Cas particulier On a : $\ln x < 0 \Leftrightarrow x < e^0$ soit $\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

De même : $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > e^0$ soit $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

On connaît ainsi *le signe de* $\ln x$ *suivant les valeurs de* x.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln x$	‖	négatif	0	positif	

▶ Exemple 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

❶ $\ln(3-x)+1>0$.

❷ $\ln(x-1)+\ln(x+1)\leq \ln 3$.

▶ **Solution** Dans chaque cas, il faut d'abord chercher quel est l'ensemble *D* des valeurs de *x* pour lesquelles le logarithme existe. On termine en ne prenant, parmi les valeurs susceptibles de convenir, que les valeurs de *x* qui sont dans cet ensemble *D*.

❶ Le réel $\ln(3-x)$ est défini si et seulement si $3-x>0$, soit $x<3$. Le domaine d'étude de l'inéquation est donc : $D=\left]-\infty\,;3\right[$. On a :

$$\ln(3-x)+1>0 \Leftrightarrow \ln(3-x)>-1 \Leftrightarrow 3-x>\mathrm{e}^{-1}$$

(la fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$).

Ainsi : $\ln(3-x)+1>0 \Leftrightarrow x<3-\mathrm{e}^{-1}$.

Comme $3-\mathrm{e}^{-1}<3$ on conclut : $S=\left]-\infty\,;3-\mathrm{e}^{-1}\right[$.

❷ Le réel $\ln(x-1)+\ln(x+1)$ est défini si et seulement si : $x-1>0$ et $x+1>0$, soit $x>1$. Le domaine d'étude de l'inéquation est donc : $D=\left]1\,;+\infty\right[$.

Pour tout *x* de *D* on a :

$$\ln(x-1)+\ln(x+1)\leq \ln 3 \Leftrightarrow \ln\big((x-1)(x+1)\big)\leq \ln 3 \Leftrightarrow x^2-1\leq 3$$

(la fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$).

Ainsi : $\ln(x-1)+\ln(x+1)\leq \ln 3 \Leftrightarrow x^2-4\leq 0$.

Le trinôme du second degré x^2-4 est négatif entre ses racines -2 et 2 et positif à l'extérieur des racines.

Mais *x* doit être dans *D*, donc on en déduit que l'ensemble des solutions de $\ln(x-1)+\ln(x+1)\leq \ln 3$ est $\left]1\,;2\right]$.

Dans une copie d'examen, il est conseillé de rappeler, au moins une fois, que la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, car c'est cette propriété qui prouve les équivalences.

▶ Exemple 6 ❶ Trouver le plus petit entier naturel *n* tel que : $2^n>10^{15}$.

❷ Trouver le plus petit entier naturel *n* tel que : $0{,}5^n<10^{-6}$.

▶ **Solution** Les logarithmes ont été inventés pour simplifier les calculs avec des produits ! On va remplacer chaque inéquation par l'inéquation équivalente sur les logarithmes.

❶ On a $2^n>10^{15} \Leftrightarrow n\ln 2>15\ln 10 \Leftrightarrow n>\dfrac{15\ln 10}{\ln 2}$. Comme $\dfrac{15\ln 10}{\ln 2}\approx 49{,}83$ on peut en déduire que le plus petit entier *n* qui convient est égal à 50. (Pour trouver 50, on peut aussi afficher les valeurs successives de 2^n, mais il faut apprendre à penser aux logarithmes dès qu'il y a des produits (donc aussi des puissances) à manipuler).

❷ On a $0{,}5^n<10^{-6} \Leftrightarrow n\ln 0{,}5<-6\ln 10 \Leftrightarrow n>\dfrac{-6\ln 10}{\ln 0{,}5}$ (attention au sens de la dernière inégalité : $\ln 0{,}5$ est négatif).

Comme $\dfrac{-6\ln 10}{\ln 0{,}5} \approx 19{,}93$ on peut en déduire que le plus petit entier n qui convient est égal à 20.

On trouvera ce type d'inéquation dans des exercices de probabilité.

Par exemple, l'inéquation $0{,}5^n < 10^{-6}$ que l'on vient de résoudre correspond à la recherche des entiers n tels que, lors de n lancers successifs d'une pièce non truquée, la probabilité d'obtenir n fois Pile est inférieure à un millionième.

D Exercices d'apprentissage

Exercice 1 Exprimer à l'aide de $\ln 2$ ou de $\ln 3$ (ou des deux) les nombres suivants :

$$\ln 6\ ;\ \ln 16\ ;\ \ln 24\ ;\ \ln\left((-3)^2\right)\ ;\ \ln 54\ ;\ \ln\left(\frac{4}{27}\right)\ ;\ \ln(\sqrt{36})\ ;\ \ln\left(\frac{9}{8}\right).$$

Exercice 2 Exprimer à l'aide de $\ln 3$, les nombres suivants :

$$\ln 63 - \ln 7\ ;\ \ln(27\sqrt{3})\ ;\ 2\ln 21 - \ln 49.$$

Exercice 3 Simplifier les écritures suivantes :

$$C = 5\ln\left(\frac{1}{3}\right) - 4\ln\sqrt{3}\ ;\ D = \ln\left(\frac{4}{5}\right) + \ln\left(\frac{5}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right).$$

Exercice 4 Simplifier :

$$E = e^{\ln 6 - \ln 3}\ ;\ F = e^{-\frac{1}{2}\ln 4}\ ;\ G = e^{\ln 28 - \ln 4}\ ;\ H = e^{2\ln 3 + 3\ln 2}\ ;\ I = \ln\left(\frac{1}{e^5}\right).$$

Exercice 5 Vrai / Faux, à chercher sans calculatrice.

a) $\ln 2 < 1 < \ln 3$.

b) Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions x de l'inéquation $x \times \ln 0{,}5 \le \ln\sqrt{2}$ est $S = \left]-\infty\ ;-\frac{1}{2}\right]$.

c) Si $x = e^5 \times e^7$ alors $\ln x = 35$.

d) Si $a = \ln 11 - \ln 4{,}9$ et $b = \ln 5{,}2$ alors $a < b$.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

❶ $\ln(5x+2) = \ln 3$; ❷ $\ln(-2x+1) = 0$;

❸ $\ln(3x+1{,}5) = 2$; ❹ $e^{2x-3} = 2$.

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

❶ $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$; ❷ $\ln(x^2+5x+6) = \ln(x+11)$;

❸ $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

❶ $\ln x > \ln 3$; ❷ $\ln(x+1) \geq \ln 3$; ❸ $\ln x \leq 1$;

❹ $\dfrac{e^{2x}}{e^{-x}} < 6$; ❺ $\ln(1-x^2) \geq 0$.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

❶ $e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0$;

❷ $e^{4x+1} - 2e^{2x} - \dfrac{3}{e} = 0$;

❸ $e^{3x} - 2e^{2x} - e^{x} \leq 0$.

Exercice 10

❶ On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ (suite géométrique de raison strictement supérieure à 1). Ceci signifie qu'on peut rendre 2^n aussi grand qu'on veut pourvu que n soit assez grand.

Déterminer le plus petit entier n pour lequel $2^n \geq 3^{15}$.

❷ On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ (suite géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1). Ceci signifie qu'on peut rendre $0{,}9^n$ aussi petit qu'on veut pourvu que n soit assez grand.

Déterminer le plus petit entier n pour lequel $0{,}9^n \leq 0{,}001$.

3 Étude de la fonction logarithme népérien

A Objectifs du chapitre

Nous étudions ici les propriétés de la fonction logarithme népérien : sens de variation, limites, courbe représentative, ainsi que des compléments sur les équations, les inéquations et les fonctions composées.

B Pour débuter

■ **Activité 2**

❶ Afficher les courbes de la fonction ln et de la fonction exp sur la calculatrice.

❷ Qu'observe-ton ?

❸ Quelles sont les propriétés de la fonction ln que l'on peut conjecturer ?

■ **Activité 3**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=e^{\ln(x)}$.

❶ Déterminer $f'(x)$ de deux façons différentes.

❷ En déduire l'expression de $\ln'(x)$.

C Cours

1. Courbe de la fonction ln

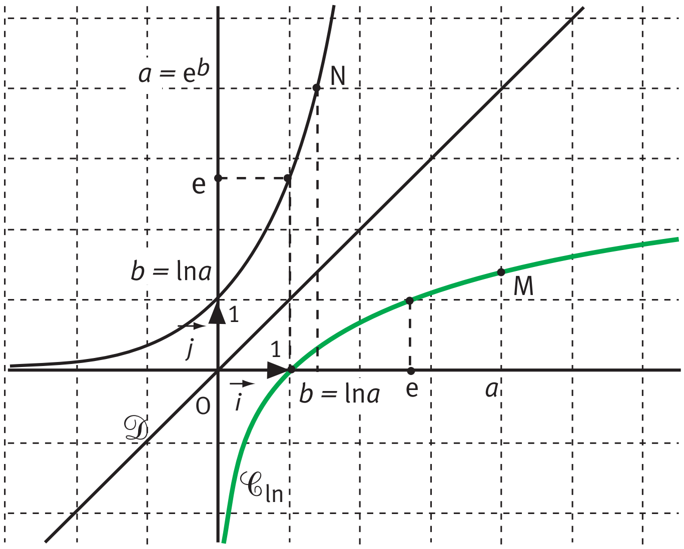
Propriété 9

Les courbes $\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$, représentant respectivement la fonction logarithme népérien et la fonction exponentielle dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$.

■ *Démonstration*

Les points $\mathrm{M}(a\,;b)$ et $\mathrm{N}(b\,;a)$ sont symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$.

Lorsque $b=\ln a$, le point $\mathrm{M}(a\,;\ln a)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ et, comme on a en même temps $a=\mathrm{e}^{b}$, le point $\mathrm{N}\left(b\,;\mathrm{e}^{b}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_{\exp}$, ces deux courbes sont donc bien symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$.



2. Fonction dérivée de la fonction ln.

Remarque

La courbe $\mathscr{C}_{\exp}$ représentative de la fonction exponentielle admet en tout point une tangente (non horizontale), la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ représentative de la fonction logarithme népérien (symétrique de $\mathscr{C}_{\exp}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$) admet donc en tout point une tangente (non verticale). Ceci permet de conjecturer que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

De plus la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\exp}$ au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\exp'(0)=1$, cette tangente est donc parallèle à la droite $\mathscr{D}$. Par symétrie par rapport à la droite $\mathscr{D}$ on trouve que la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ admet une tangente au point d'abscisse 1 et que le coefficient directeur de cette tangente est égal à 1.

Dans ce qui suit, on admet que la fonction ln est dérivable en 1 et que $\ln'(1)=1$.

Théorème 2

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}.$$

■ *Démonstration*

On a admis que $\ln'(1)=1$, c'est-à-dire que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}=1,\ \text{soit}\ \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1.$$

Soit a un réel strictement positif. Le taux d'accroissement en a est donc $\dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h}$, h étant un nombre réel tel que $a+h$ soit strictement positif.

On a $\dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h}=\dfrac{\ln\left(\dfrac{a+h}{a}\right)}{h}=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{h}{a}\right)}{h}=\dfrac{1}{a}\times\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{h}{a}\right)}{\dfrac{h}{a}}.$

On a transformé suffisamment pour reconnaître une quantité qui ressemble à celle dont on a admis la limite. La fonction $h \mapsto \dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h}$ est donc la composée de la fonction $h \mapsto \dfrac{h}{a}$ et de la fonction $H \mapsto \dfrac{1}{a} \times \dfrac{\ln(1+H)}{H}$. or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{a} = 0$ et $\lim\limits_{H \to 0} \dfrac{\ln(1+H)}{H} = 1$, donc, en composant avec $H = \dfrac{h}{a}$, on obtient :
$\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h} \right) = \dfrac{1}{a} \lim\limits_{H \to 0} \left(\dfrac{\ln(1+H)}{H} \right) = \dfrac{1}{a}$.
Ce qui précède prouve que la fonction ln est dérivable en a et que $\ln'(a) = \dfrac{1}{a}$, le théorème est donc démontré.

Remarque Ici, on a admis que la fonction ln est dérivable en 1 et la valeur du nombre dérivé avec $\ln'(1) = 1$; dans l'activité 3, on a construit une autre démonstration en admettant que la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais sans préciser de valeur. Les points de vue sont différents suivant les manuels que vous pouvez consulter. Il est possible aussi d'étudier la dérivabilité de la fonction ln sans rien admettre de particulier concernant la fonction ln, mais c'est alors plus difficile.

Remarque Le signe de $\ln'(x)$ qui vaut $\dfrac{1}{x}$ étant toujours positif sur $]0\,;+\infty[$, on retrouve que la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

3. Limites aux bornes de]0 ; +∞[

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Les courbes $\mathscr{C}_{\exp}$ et $\mathscr{C}_{\ln}$ étant symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$, on peut conjecturer les limites de la fonction ln aux bornes de $]0\,;+\infty[$.

Propriété 10

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$.

L'axe des ordonnées est donc asymptote à la courbe (cela se déduit, par symétrie, du fait que l'axe des abscisses est asymptote en $-\infty$ à la courbe représentative de la fonction exponentielle). Une démonstration de ces résultats utilisant les propriétés algébriques et le sens de variation de la fonction ln est proposée ci-dessous sous forme d'exercice corrigé.

▶ Exemple 7

1. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(2^n\right) = +\infty$.
2. En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ (on reviendra à la définition d'une limite).
3. En déduire que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$.

▶ Solution

❶ Pour tout entier naturel n : $\ln\left(2^n\right)=n\ln 2$. Le nombre $\ln 2$ est strictement positif car, la fonction ln étant strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$, on a $\ln 2>\ln 1$. La suite arithmétique de terme général $n\ln 2$ diverge donc vers $+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(2^n\right)=+\infty$.

❷ Considérons un intervalle $\mathrm{I}=\left]A\,;+\infty\right[$. Cet intervalle I contient tous les termes de la suite $\left(\ln\left(2^n\right)\right)$ à partir d'un certain rang n_0. La fonction ln étant croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$, pour tout $x\geq 2^{n_0}$, on a $\ln x>\ln\left(2^{n_0}\right)>A$. Ainsi I contient toutes les valeurs $\ln x$ pour x assez grand ($x\geq 2^{n_0}$). Cela est vrai pour tout intervalle I de la forme $\mathrm{I}=\left]A\,;\,+\infty\right[$, cela signifie que :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty.$$

❸ Pour montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$, on utilise l'égalité $\ln x=-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

La fonction $x\mapsto-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est la composée de $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ et de $X\mapsto-\ln X$.

Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}-\ln X=-\infty$, donc, par composition avec $X=\dfrac{1}{x}$,

on obtient : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}-\ln X=-\infty.$

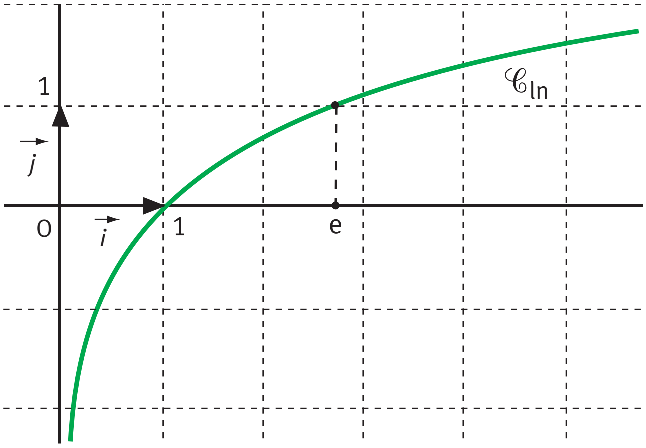
4. Tableau de variation et courbe

Le tableau de variation résume les résultats précédents, on a indiqué deux valeurs remarquables.

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$	‖	$+$		$+$		$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

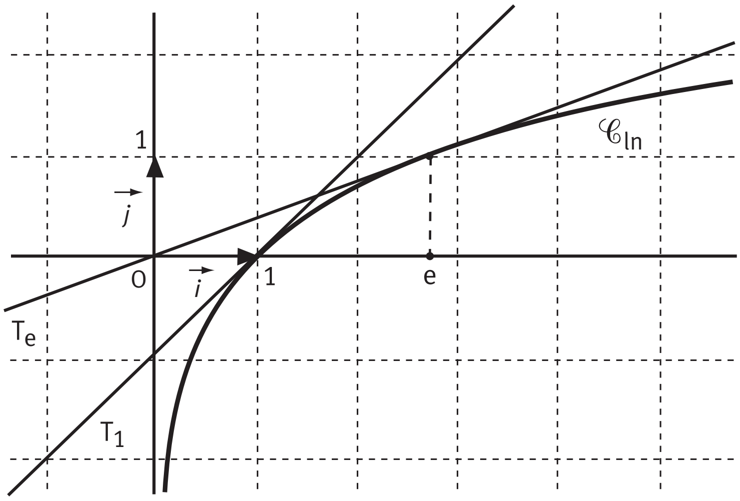
On observe que l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe de la fonction ln.

Il faut mémoriser parfaitement la courbe de la fonction ln.



▶ Exemple 8 Tracer la courbe représentative de la fonction ln avec ses tangentes aux points d'abscisses 1 et e.

▶ **Solution** On peut obtenir ces tangentes par symétrie à partir des tangentes à la courbe représentative de la fonction exponentielle.



On peut aussi chercher les équations réduites.

Tangente au point d'abscisse 1 : $y = \ln'(1)(x-1)+0$, soit $y = x-1$.

Tangente au point d'abscisse e : $y = \ln'(e)(x-e)+1 = \dfrac{x-e}{e}+1$, soit $y = \dfrac{x}{e}$.

5. Autres limites

Propriété 11

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$

■ *Démonstration*

C'est une forme indéterminée, pour l'étudier on peut faire apparaître une exponentielle pour utiliser une limite connue. Comme $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln x}{e^{\ln x}}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{e^{\ln x}}$ est la composée de $x \mapsto \ln x$ et de $X \mapsto \dfrac{X}{e^X}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$ (car $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$), donc, par composition avec $X = \ln x$, on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^{\ln x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0.$

Remarque Cela signifie qu'en $+\infty$ la fonction ln « tend vers $+\infty$ » moins vite que la fonction $x \mapsto x$.

Propriété 12

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x = 0.$

Démonstration

C'est encore une forme indéterminée. On se ramène au cas précédent en utilisant le logarithme de l'inverse.

Comme $x\ln x = -x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$, la fonction $x \mapsto x\ln x$ est la composée de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et de $X \mapsto -\dfrac{\ln X}{X}$. Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln X}{X}\right) = 0$, donc, par composition avec $X = \dfrac{1}{x}$, on obtient :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{-\ln X}{X} = 0.$$

▸ **Exemple 9** Démontrer que ❶ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2\ln x = 0$; ❷ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \sqrt{x}\ln x = 0.$

▸ **Solution**

❶ Comme pour tout x strictement positif on a $x^2\ln x = x \times x\ln x$, il ne s'agit pas d'une forme indéterminée car on reconnaît le produit de deux quantités qui tendent vers 0 quand x tend vers 0, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x = 0.$

❷ Mais pour $\sqrt{x}\ln x$ c'est différent. On peut transformer le logarithme pour qu'il porte sur la racine carrée ce qui permet ensuite d'utiliser la propriété 12.

Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\sqrt{x}\ln x = \sqrt{x}\ln\left[\left(\sqrt{x}\right)^2\right] = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}.$$

La fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}$ est la composée de $x \mapsto \sqrt{x}$ et de $X \mapsto 2X\ln X$.

Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\X>0}} 2X\ln X = 0$, donc, en composant par $X = \sqrt{x}$, on obtient : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \sqrt{x}\ln x = \lim\limits_{\substack{X\to 0\\X>0}} 2X\ln X = 0.$

Rappel

On a admis que $\ln'(1) = 1$, soit $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1.$

À savoir

Dans les études d'une limite où intervient un logarithme $\ln x$, on utilise les limites du cours en observant le comportement de x pour bien savoir quelle limite utiliser.

x tend vers…	0	1	$+\infty$
Limites du cours à connaître	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x = 0$	$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Remarque On peut retenir les deux limites $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ en remarquant que, pour ces deux formes indéterminées, c'est « x qui l'emporte sur le logarithme en 0 et en $+\infty$ ».

6. Fonctions composées ln$u$

Propriété 13

Une fonction composée de la forme $\ln u$ (qui s'écrit aussi $\ln \circ u$) est définie lorsque la fonction u est à valeurs strictement positives : $u(x) > 0$.

Limites

Les limites s'obtiennent en appliquant les règles de composition.

Dans les études d'une limite où intervient un logarithme $\ln\big(u(x)\big)$, on utilise les limites du cours en observant le comportement de la quantité $u(x)$ dont on prend le logarithme pour bien savoir quelle limite connue on peut utiliser.

Propriété 14

Soit u une fonction définie et à valeurs strictement positives sur un intervalle I. La fonction composée $\ln u$, définie sur I, possède les mêmes variations sur I que la fonction u.

■ *Démonstration*

Elle est analogue à celle qui a été faite pour la fonction composée $\exp u$ car la fonction ln est strictement croissante sur son ensemble de définition.

On peut donc connaître les variations de la fonction $\ln u$ sans utiliser la fonction dérivée. Mais si on a besoin de la fonction dérivée la propriété suivante permet de la déterminer.

Propriété 15

Soit u une fonction définie, dérivable et à valeurs strictement positives sur un intervalle I. La fonction composée $\ln u$, définie sur I, est aussi dérivable sur I et on a : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, c'est-à-dire que, si la fonction f est définie sur I par $f(x) = \ln\big(u(x)\big)$, alors la fonction f est dérivable sur I et, pour tout x de I, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

■ *Démonstration*

On admettra que la fonction composée $\ln u$, définie sur I, est aussi dérivable sur I lorsque la fonction u est définie, dérivable et à valeurs strictement positives sur I.

Montrons alors ici que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Pour tout x élément de l'intervalle I, on peut écrire $u(x) = e^{\ln(u(x))} = e^{(\ln u)(x)}$. On sait que la fonction e^v est dérivable sur I si v est dérivable sur I et que $\left(e^v\right)' = v'e^v$. On applique ce résultat à la fonction $v = \ln u$ et on obtient

$$u'(x) = (\ln u)'(x)e^{(\ln u)(x)}, \text{ soit } u'(x) = (\ln u)'(x) \times u(x).$$

Comme $u(x)$ ne s'annule pas, on en déduit la relation annoncée :

$$(\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

▶ Exemple 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$. Etudier la dérivabilité de la fonction f.

▶ **Solution**

On écrit $f = \ln u$, la fonction u étant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2+1$.

Comme u est une fonction polynôme, u est dérivable sur $\mathbb{R}$, u est à valeurs strictement positives, et donc, d'après la propriété précédente, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

On a ici complètement détaillé l'application de la propriété, dans la pratique on pourra abréger la rédaction.

D Exercices d'apprentissage

Exercice 11

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x)$;
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x - \ln x)$;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{1+x}$;
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x}{1+\ln x}$;
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^x+1\right)$;
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(e^x+1\right)$;
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$.

Exercice 12

Chacune des fonctions suivantes est définie et dérivable sur l'intervalle I. Donner l'expression de la fonction dérivée dans chaque cas.

a) $f(x) = \ln(3x-4)$ $\quad$ $I = \left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$

b) $f(x) = \ln(3-x)$ $\quad$ $I = \left]-\infty;3\right[$

c) $f(x) = \ln(x^2+1)$ $\quad$ $I = \mathbb{R}$

d) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$ $\qquad$ $\mathrm{I}=\left]0\,;+\infty\right[$

e) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ $\qquad$ $\mathrm{I}=\left]0\,;+\infty\right[$

f) $f(x)=x\ln x-x$ $\qquad$ $I=\left]0\,;+\infty\right[$.

Exercice 13

Du tracé de la courbe représentative de la fonction ln, déduire rapidement l'allure des courbes d'équation :

❶ $y=\ln\left(\sqrt{x}\right)$; $\qquad$ ❷ $y=\ln(2x)$.

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

❶ Dresser le tableau de variation de f et donner sa courbe représentative.

❷ Discuter l'existence et le nombre de solutions de l'équation (E) : $e^{kx}=x$ selon la valeur du réel k.

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)$.

❶ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❷ Étudier le sens de variation de la fonction f et donner son tableau de variation.

❸ Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par $f(0)=0$ et, pour tout réel x strictement positif, $f(x)=x\ln x$.

❶ Étudier la continuité de f en 0.

❷ Étudier la dérivabilité de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?

❸ Étudier les variations de f.

❹ Donner le tableau de variation de f..

❺ Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Exercice 17

Cet exercice est un exercice du type « Restitution organisée de connaissance ».

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$, positive sur $\left[1\,;+\infty\right[$, et vérifie :

- $\ln 1 = 0$;
- pour tous réels strictement positifs x et y, $\ln(xy)=\ln x+\ln y$;
- pour tout réel x strictement positif, $\ln' x=\dfrac{1}{x}$;
- $\ln 2\approx 0{,}69$ à 10^{-2} près.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

Répondre aux questions suivantes en utilisant pour la fonction ln seulement les quatre propriétés précédentes.

❶ Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\,;+\infty[$.

❷ En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x, puis que, pour tout x strictement supérieur à 1, $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

❸ En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

Exercice 18 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

4 Compléments

A Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, on va d'abord rechercher toutes les fonctions qui vérifient la relation fonctionnelle, c'est-à-dire les fonctions f, définies et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, telles que : pour tous x et y de $\mathbb{R}^{+*}$, $f(xy)=f(x)+f(y)$.

Puis on étudie un cas particulier très utilisé : la fonction logarithme décimal.

B Pour débuter

■ **Activité 4**

Pendant les étés 1615 et 1616, Henry Briggs, professeur à Oxford, rendit visite à Neper en Ecosse pour discuter avec lui d'une amélioration des logarithmes, en les rendant plus pratiques pour les utilisateurs en utilisant le nombre 10.

On note log une fonction telle que $\log 1=0$, $\log 10=1$, et on suppose que cette fonction possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln.

1. Déterminer $\log 10^5$, $\log 10^{-2}$, $\log 10^n$, n étant un entier relatif.

2. Briggs a déterminé que $\log 2 \approx 0{,}30103$, en déduire une valeur approchée de log 20, log 200, log 2000. Donner un nombre dont le logarithme décimal est environ 5,30103.

C Cours

1. Relation fonctionnelle

On sait que la fonction logarithme népérien vérifie :

- pour tous x, y de $\mathbb{R}^{+*}$, $\ln(xy)=\ln x+\ln y\,(*)$;
- $(\ln)'(1)=1$.

On se propose de démontrer que ces propriétés sont caractéristiques de la fonction ln (c'est-à-dire que la seule fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant les propriétés précédentes est la fonction ln) et de déterminer l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant la propriété$(*)$.

On vous propose de faire cela sous forme d'un exercice corrigé.

Exercice On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions f définies, dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifiant la propriété (*) : pour tous x, y de $\mathbb{R}^{+*}$, $f(xy)=f(x)+f(y)$.

On considère une fonction f dans $\mathscr{E}$.

1. Montrer que : $f(1)=0$.
2. Soient a un réel strictement positif et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x)=f(ax)-f(x)$.

   Montrer que g est constante.
3. En déduire que : $f'(a)=\dfrac{f'(1)}{a}$.
4. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, $f(x)=k\times\ln x$ où $k=f'(1)$ (on pourra considérer la fonction $f-k\times\ln$).
5. Déterminer, alors, l'ensemble $\mathscr{E}$.
6. Conclure.

Solution

1. L'égalité (*) pour $x=y=1$ nous donne :
$$f(1\times 1)=f(1)+f(1) \text{ soit } f(1)=2\times f(1).$$
Ainsi : $f(1)=0$.

2. Pour tout x de $]0\,;+\infty[$:
$$g(x)=f(ax)-f(x)=f(a)+f(x)-f(x)=f(a)$$
Ainsi g est constante.

3. La fonction g est constante donc pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$: $g'(x)=0$.

   De plus, par définition de g, pout tout x de $\mathbb{R}^{+*}$: $g'(x)=af'(x)-f'(x)$. On a donc l'égalité : $$af'(ax)-f'(x)=0$$

   En particulier, pour $x=1$:
$$af'(a)-f'(1)=0 \text{ et donc : } f'(a)=\frac{f'(1)}{a}.$$

4. Donc on note $k=f'(1)$ de telle sorte que $f'(x)=\dfrac{k}{x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ et on considère la fontion h définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $h(x)=k\ln x$.

   Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$: $(f-h)'(x)=f'(x)-h'(x)=\dfrac{k}{x}-\dfrac{k}{x}=0$. Ainsi $f-h$ est constante : pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$: $f(x)-h(x)=C\,(C\in\mathbb{R})$.

   On a : $C=f(1)-h(1)=0-0=0$ et donc $f=h$ et pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$:
$$f(x)=k\times\ln x.$$

5. On vient de prouver que si f appartient à $\mathscr{E}$ alors : $f=k\times\ln$ pour un certain réel k.

   Soit k un réel et f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x)=k\times\ln x$.

   Pour tous x, y de $\mathbb{R}^{+*}$: $f(xy)=k\times\ln(xy)=k\times[\ln x+\ln y]=f(x)+f(y)$.

   Ainsi $f\in\mathscr{E}$.

   $\mathscr{E}$ est donc l'ensemble des fonctions $k\times\ln$ où k appartient à $\mathbb{R}$.

❻ Soit f une fonction définie, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, vérifiant (*) et telle que :

$$f'(1)=1.$$

La fonction f appartient à $\mathscr{E}$ donc il existe un réel k tel que : $f(x)=k\times\ln x$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$. On a, alors : $f'(x)=\dfrac{k}{x}$ et $f'(1)=k=1$. Ainsi f est la fonction ln.

Remarque

La fonction qui a été utilisée pour construire l'activité 1 est la fonction $f=k\ln$ avec $k=\dfrac{1}{\ln 1{,}1}$.

2. Fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal est une des fonctions qui vérifient la relation fonctionnelle ci-dessus puisqu'elle est de la forme $k\ln$. Le programme de terminale S demande de l'évoquer pour son utilité dans les autres disciplines.

Il est nécessaire de connaître sa définition, mais les propriétés qui sont données ci-dessous ne sont pas exigibles.

a) Définition et principales propriétés

La fonction logarithme décimal est une des fonctions de la forme $k\ln$, le réel k étant choisi de façon que 10 ait pour image 1.

Définition 4

La fonction logarithme décimal (notée log) est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\log x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Notation

L'image d'un nombre x est notée $\log x$ ou $\log(x)$, les parenthèses étant indispensables pour des expressions moins simples.

Calculatrice : sur beaucoup de calculatrice on peut trouver la touche $\boxed{\log}$. Si elle n'existe pas, il suffit d'utiliser le quotient de la définition.

Remarque

- $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$;
- pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $\log x=k\times\ln x$ où $k=\dfrac{1}{\ln 10}\approx 0{,}434294$.

Des propriétés de la fonction ln, en multipliant tous les logarithmes népériens par k, on déduit les propriétés suivantes.

Propriété 16

Pour tous réels a, b de $\left]0\,;+\infty\right[$ et n de $\mathbb{Z}$, on a :

$\log(ab) = \log a + \log b$; $\qquad \log\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\log a$;

$\log\left(\dfrac{b}{a}\right) = \log b - \log a$; $\qquad \log\left(a^n\right) = n\log a$;

$\log\left(10^n\right) = n$; $\qquad \log\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\log a.$

On déduit des variations de la fonction ln, les variations de la fonction log :

x	0	1	10	$+\infty$
$\ln x$	‖ $-\infty$	0	1	$+\infty$

b) Lien avec l'ordre de grandeur et l'écriture décimale d'un nombre

Le logarithme décimal d'un nombre renseigne immédiatement sur son ordre de grandeur et le nombre de ses chiffres quand il est écrit sous forme décimale (par exemple 16 est l'écriture décimale de 4^2).

Avant d'étudier le cas général, un exemple va illustrer cela.

▶ Exemple 11

Considérons le nombre $n = 2012^{2012}$.

On a $\log\left(2012^{2012}\right) = 2012 \times \log 2012 \approx 6646{,}899$. La partie entière du logarithme décimal de 2012^{2012} étant égale à 6646, on va montrer qu'on peut en déduire que 2012^{2012} est compris entre 10^{6646} et 10^{6647} et que 2012^{2012} est un entier écrit sous forme décimale avec 6647 chiffres.

Propriété 17

Soient x un réel strictement positif et $x = p \times 10^k$ l'écriture scientifique de ce nombre ($p \in \left[1\,;10\right[$, $k \in \mathbb{Z}$).
Alors :

- $k = \mathrm{E}(\log x)$;
- $x = p \times 10^{\mathrm{E}(\log x)}$;
- $10^{\mathrm{E}(\log x)} \le x < 10^{\mathrm{E}(\log x)+1}$.

■ *Démonstration*

Comme $p \in \left[1\,;10\right[$, on a $1 \le p < 10$ et donc $0 \le \log p < 1$ puisque la fonction log est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

En ajoutant k, il vient :

$k \le \log p + k < k + 1$, donc

$k \leq \log x < k+1$ et par suite $k = \mathrm{E}(\log x)$ et donc $x = p \times 10^{\mathrm{E}(\log x)}$. Comme $1 \leq p < 10$, on obtient l'encadrement : $10^{\mathrm{E}(\log x)} \leq p \times 10^{k} < 10^{\mathrm{E}(\log x)+1}$, soit $10^{\mathrm{E}(\log x)} \leq x < 10^{\mathrm{E}(\log x)+1}$.

Propriété 18

Si x est un nombre entier naturel non nul, le nombre de chiffres de l'écriture décimale de x est égal à $\mathrm{E}(\log x)+1$.

▶ Exemple 12

Soit $x = 1234$, $\log 1234 \approx 3{,}091$ et $\mathrm{E}(\log 1234) = 3$: le nombre 1234 est bien écrit avec $3+1=4$ chiffres.

■ *Démonstration*

Soit x un nombre entier naturel non nul, d'après la propriété précédente , on a $10^{\mathrm{E}(\log x)} \leq x < 10^{\mathrm{E}(\log x)+1}$. L'écriture décimale de x comporte donc autant de chiffres que celle de $10^{\mathrm{E}(\log x)}$, c'est-à-dire $\mathrm{E}(\log x)+1$.

Propriété 19

Inversement, soit x un nombre entier naturel non nul, alors $\mathrm{E}(\log x) = n-1$ et $n-1 \leq \log x < n$.

■ *Démonstration*

Soit x un nombre entier naturel non nul, alors $10^{n-1} \leq x < 10^{n}$. Donc, puisque la fonction log est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a $\log\left(10^{n-1}\right) \leq \log x < \log\left(10^{n}\right)$, soit $n-1 \leq \log x < n$. On trouve donc $\mathrm{E}(\log x) = n-1$.

▶ Exemple

On peut dire que $4 \leq \log 98765 < 5$ puisque 98765 est écrit avec 5 chiffres et $\mathrm{E}(\log x) = n-1 = 4$ où n est le nombre de chiffres de x.

c) Utilisation de cette fonction dans d'autres domaines

En chimie

Définition

Le pH d'une solution aqueuse est égal à : $\mathrm{pH} = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration de la solution en ions H_3O^+ (en $\mathrm{mol.L^{-1}}$).

▶ Exemple

La concentration en ions $[H_3O^+]$ d'une solution dont le pH est égal à 7 a pour logarithme décimal -7 elle vaut donc 10^{-7}.

Si le pH augmente de 1, il devient égal à 8, le logarithme de la concentration diminue de 1, il devient -8, la concentration est égale à 10^{-8}.

Ainsi, si le pH augmente de 1, la concentration est divisée par 10 et, si le pH diminue de 1, la concentration est multipliée par 10.

Intensité de certains phénomènes naturels.

L'intensité d'un séisme, la luminosité d'une étoile, l'intensité d'un son sont des grandeurs pour lesquelles les unités de mesures utilisent les logarithmes décimaux. En effet, on a observé que nos sens perçoivent un signal proportionnellement au logarithme de son intensité.

L'exemple le plus quotidien est le décibel qui sert à mesurer l'intensité du son de nos baladeurs…

D Exercices d'apprentissage

Exercice 19

Quel est le nombre de chiffres de l'écriture décimale du nombre premier $A = 2^{243112609} - 1$ (le plus grand nombre premier connu en décembre 2011) ?

Questions subsidiaires :

1. *Combien de chandelles ont été utilisées par Briggs pour s'éclairer pendant tous ces calculs ?*
2. *Combien de temps l'invention des logarithmes a-t-elle fait gagner aux astronomes, navigateurs, ingénieurs… depuis 1614 ?*

5 Synthèse

A Synthèse de la séquence

1. Définition de la fonction logarithme népérien

Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la bijection réciproque de la fonction exponentielle.

$$\exp : \mathbb{R} \to \left]0\,;+\infty\right[\qquad a \mapsto e^a = b$$

$$\begin{tikzcd} a = \ln b \arrow[r, bend left, "\exp"] & b = e^a \arrow[l, bend left, "\ln"] \end{tikzcd}$$

$$\ln : \left]0\,;+\infty\right[\to \mathbb{R} \qquad b \mapsto \ln b = a$$

Propriété

Pour tout a de $\mathbb{R}$, $\ln\left(e^a\right) = a$.

Pour tout $b > 0$: $e^{\ln b} = b$.

$$\begin{tikzcd} a = \ln b = \ln e^a \arrow[r, bend left, "\exp"] & b = e^a = e^{\ln b} \arrow[l, bend left, "\ln"] \end{tikzcd}$$

Propriété

Pour tous $a > 0$ et b dans $\mathbb{R}$: $b = \ln a \Leftrightarrow a = e^b$.

2. Valeurs particulières : ln1 = 0 et ln e = 1

3. Sens de variation

Propriété

La fonction ln est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

4. Propriétés algébriques

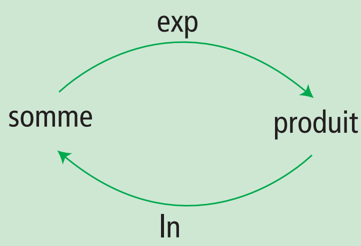
Théroème : Relation fonctionnelle

- $a > 0$ et $b > 0$

$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b.$

Propriété

$a > 0$, $b > 0$ et n dans $\mathbb{Z}$:



- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$;
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$;
- $\ln\left(\dfrac{b}{a}\right) = \ln b - \ln a$;
- $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$;
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln a.$

5. Equations, inéquations

Propriété

$a > 0$ et $b > 0$: $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b.$

❶ Pour tout réel k, $\ln x = k \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^k.$

❷ Si $k > 0$ $\mathrm{e}^x = k \Leftrightarrow x = \ln k.$

❸ Si $k \leq 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = k$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}.$

Propriété

$a > 0$ et $b > 0$: $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b.$

Propriété

a) k dans $\mathbb{R}$ et $x > 0$: $\ln x < k \Leftrightarrow x < \mathrm{e}^k.$

b) $\lambda > 0$ et x dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x < \lambda \Leftrightarrow x < \ln \lambda.$

6. Signe de ln$x$ suivant les valeurs de x

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln x$	||	négatif	0	positif	

7. Fonction ln

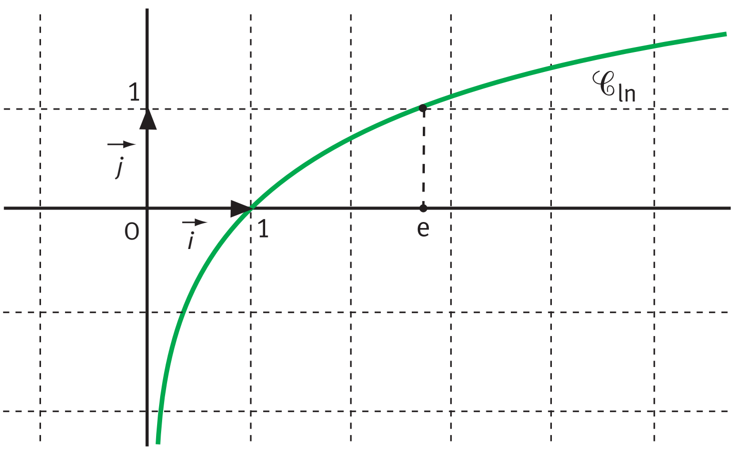
Théroème

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour $x>0$, on a $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Propriété

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$.

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$	||	$+$		$+$		$+$	
$\ln x$	|| $-\infty$		0		1		$+\infty$



Propriété

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \; ; \; \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0 \; ; \; \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

À savoir

Dans les études d'une limite où intervient un logarithme $\ln x$, on utilise les limites du cours en observant le comportement de x pour bien savoir quelle limite utiliser.

x tend vers…	0	1	$+\infty$
Limites du cours à connaître	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0$	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Remarque

On peut retenir les deux limites $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ en remarquant que, pour ces deux formes indéterminées, c'est « x qui l'a emporté sur le logarithme ».

8. Fonctions composées ln$u$

- **Définition :** $\ln u$ est définie lorsque la fonction u est à valeurs strictement positives.
- **Variations :** $\ln u$ a les mêmes variations que u.
- **Dérivée :** $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ sur tout intervalle I où u est dérivable et à valeurs strictement positives.

9. La fonction logarithme décimal

On rappelle qu'il suffit de savoir la définition, le reste n'est pas exigible.

- Définition : sur $]0\,;+\infty[$ $x \mapsto \log x$ avec $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.
- *Valeurs particulières : log1 = 0, log10 = 1.*
- *Propriétés algébriques : analogues à celles de ln.*
- *Variations : log est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ comme la fonction ln.*

x	0		1	10	$+\infty$
$\ln x$	‖	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Soient x un réel strictement positif et $x = p \times 10^k$ l'écriture scientifique de ce nombre ($p \in [1;10[$, $k \in \mathbb{Z}$). Alors :

- $k = \mathrm{E}(\log x)$;
- $x = p \times 10^{\mathrm{E}(\log x)}$;
- $10^{\mathrm{E}(\log x)} \leq x < 10^{\mathrm{E}(\log x)+1}$.

B Exercices de synthèse

Exercice I

Une fonction f définie et continue sur un intervalle I est dite convexe (resp. concave si pour tous a, b de I :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \text{ (resp.} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Graphiquement cela signifie que si A et B sont 2 points de la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction alors le milieu de [AB] est au-dessus (resp. en dessous) de $\mathscr{C}$.

❶ Montrer que la fonction « carré » est convexe sur $\mathbb{R}$.

❷ **a)** Montrer que pour tous, a, b de $]0 ; +\infty[$: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

b) En déduire que la fonction ln est concave sur $]0 ; +\infty[$.

On pourrait faire le lien avec l'exercice de synthèse V de la séquence 2 où la notion de convexité est présentée d'un autre point de vue.

Exercice II

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 2\ln x - 1 + \dfrac{1}{x}$.

❶ Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$.

❷ Calculer $g'(x)$. Dresser, alors, le tableau de variations de g.

❸ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β $(\alpha < \beta)$.

❹ Que vaut β ? Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

❺ Donner le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^2(\ln x - 1) + x$.

❶ Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$.

❷ Montrer que : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{2}(1-\alpha)$. En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

❸ Montrer que pour tout x de $]0\,;\infty[$: $f'(x)=x\cdot g(x)$.

❹ Dresser le tableau de variation de f.

Exercice III

Soient f la fonction définie sur $I=]\,4\,;+\infty[$ par : $f(x)=-x+3+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x-4}{x-2}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

❶ Étudier les limites de f aux bornes de I.

❷ Montrer que : $f'(x)=-\dfrac{x^2-6x+7}{(x-4)(x-2)}$.

❸ Dresser le tableau de variation de f.

❹ Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=-x+3$. Etudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Représenter sur un même graphique la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Exercice IV

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f(x)=\ln x$ et $g(x)=x-\ln x$. On note, respectivement $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On se propose de chercher les éventuelles tangentes communes aux deux courbes. Soient a, b deux réels strictement positifs, A le point d'abscisse a de $\mathscr{C}$ et B le point d'abscisse b de $\mathscr{C}'$. On note $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ en A et $\mathscr{T}'$ la tangente $\mathscr{C}'$ en B.

❶ Écrire l'équation réduite de $\mathscr{T}$.

❷ Écrire l'équation réduite de $\mathscr{T}'$.

❸ En déduire que : $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ sont confondues si et seulement si : $\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1\\ \ln(ab)=2\end{cases}$.

❹ Résoudre le précédent système et conclure.

Exercice V

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x)=x^n\ln x$ pour $x\neq 0$ et $f_n(0)=0$. On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

❶ Montrer que f_n est continue en 0. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

❷ Dresser le tableau de variation de f_n.

❸ Sur un même graphique, tracer $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

❹ Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par 2 points fixes O et A.

❺ Démontrer que toutes les courbes admettent en A la même tangente.

Exercice VI Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 9,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \text{ et } v_n = u_n + 6.$$

❶ a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique à termes positifs.

b) Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n et en déduire la somme $S_n^1 = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} S_n$ et $\lim_{n \to +\infty} S'_n$.

❷ On définit la suite (w_n) par $w_n = \ln v_n$ pour tout entier n.

Montrer que (w_n) est une suite arithmétique.

Calculer $S_n^n = \sum_{k=0}^{n} w_k$ en fonction de n et déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n^n$.

❸ Calculer le produit $P_n = v_0 \times v_1 \ldots \times v_n$ en fonction de n.

En déduire $\lim_{n \to +\infty} P_n$.

Exercice VII **Partie A**

Soit f la fonction sur $[-1\ ;1[$ par : $f(x) = \ln(1-x) + x$.

❶ Dresser le tableau de variation de f (on précisera les limites aux bornes).

❷ En déduire que pour tout entier naturel non nul n :

a) $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} < 0.$ b) $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} < 0.$

Partie B

On considère les suites u et v définies pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$
$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

❶ Montrer que la suite u est décroissante et que la suite v est croissante.

❷ Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $v_1 < v_n < u_n < u_1$. En déduire que les suites u et v sont convergentes.

❸ Montrer que $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$. En déduire que les suites u et v convergent vers la même limite.

❹ La limite commune à ces deux suites est appelée la constante d'Euler, elle est notée γ. Donner une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. ■