Math93.com

Devoir Surveillé n°6
Correction

Terminale ES/L
Intégrales et primitives
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

Exercice 1. — 4.5 points

Soit g et G définies sur $]0;+\infty[$ *par :* $g(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$ *et* $G(x)=(\ln x)^2$.

1. [1.5 point] Démontrer que G est une primitive de g.

La fonction G est une primitive de g si elle est dérivable et que $G'=g$.
Or G est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. Elle est de la forme u^2 donc de dérivée $2u'u$ avec pour tout x de $]0;+\infty[$:

$u(x)=\ln x$	$u'(x)=\dfrac{1}{x}$

Pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$G'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x$$
$$G'(x)=2\times\frac{\ln x}{x}$$
$$G'(x)=\underline{g(x)}$$

G est bien une primitive de g

2. [1.5 point] Trouver la primitive de g qui s'annule pour $x=\mathrm{e}$.

Les primitives de g sont de la forme $H_k(x)=G(x)+k=(\ln x)^2+k$ donc la primitive de g qui s'annule pour $x=\mathrm{e}$ vérifie :

$$H_k(\mathrm{e})=0\iff G(\mathrm{e})+k=0\iff \underbrace{(\ln \mathrm{e})^2}_{1^2}+k=0\iff k=-1$$

Soit

$$\boxed{H(x)=(\ln x)^2-1}$$

3. [1.5 point] Montrer que : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

On remarque que

$$g(x)=\frac{2\ln x}{x}=2\times\frac{\ln x}{x}\iff\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{2}\times g(x)$$

Donc

$$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\times\int_1^{\mathrm{e}}\frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\times\int_1^{\mathrm{e}}g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\times(G(\mathrm{e})-G(1))$$
$$=\frac{1}{2}\times\underbrace{\left((\ln \mathrm{e})^2-(\ln 1)^2\right)}_{1-0}$$

$$\boxed{\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}}$$

Exercice 2. 15.5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique situé en annexe. Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;7]$.

1. Encadrer par deux entiers consécutifs chacune des solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle $[0\,;7]$.

$$f(x) = 10 \iff \begin{cases} 0 < x_1 < 1 \\ 2 < x_2 < 3 \end{cases}$$

2. Donner le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;7]$ et préciser la valeur en laquelle il est atteint.

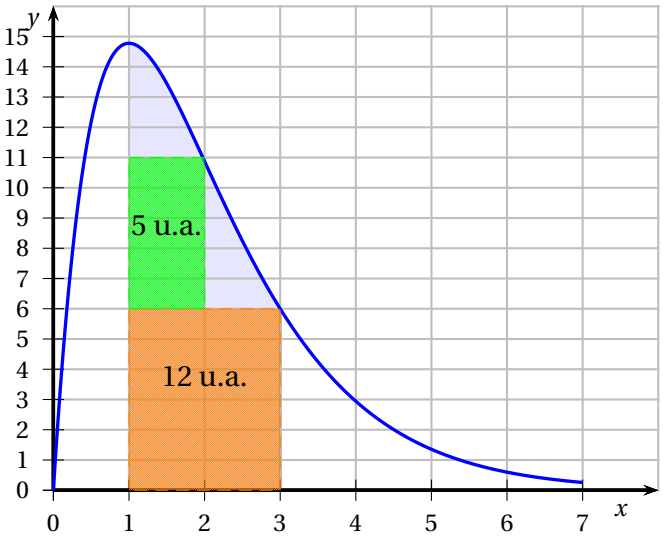
Le maximum de la fonction f vaut environ 14,8 et il semble atteint pour $x = 1$.

3. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel ?

a. $[9\,;17]$ **b.** $[18\,;26]$ **c.** $[27\,;35]$

La fonction est définie et dérivable (donc continue) sur son intervalle de définition, elle y est donc intégrable. Y étant en outre positive, l'intégrale correspond donc à l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

On voit alors que la valeur de l'intégrale appartient à l'intervalle $[16\,;26]$, et seule la réponse b convient.



Partie B

La fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;7]$ d'expression : $f(x) = 2xe^{-x+3}$.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;7]$, $f'(x) = (-2x+2)\mathrm{e}^{-x+3}$.

$$f : \begin{cases} [0\,;7] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 2x \times \mathrm{e}^{-x+3} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $[0\,;7]$.

La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0\,;7]\ ;\ f(x) = u(x) \times v(x) \ : \ \begin{cases} u(x) = 2x & ; \quad u'(x) = 2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x+3} & ; \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x+3} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;7],\ \ f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= 2 \times \mathrm{e}^{-x+3} + 2x \times \left(-\mathrm{e}^{-x+3}\right) \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\,;7]\ ;\ f'(x) = (-2x+2)\mathrm{e}^{-x+3}}$$

2.

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;7]$ puis en déduire le tableau de variation de la fonction f.

$$\forall x \in [0\,;\,7]\,;\; f'(x) = (-2x+2)\mathrm{e}^{-x+3}$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et a fortiori sur $[0\,;\,7]$ donc f' est du signe du facteur $(-2x+2)$.

$$\left\{\begin{array}{l} -2x+2=0 \Longleftrightarrow x=1 \\ -2x+2<0 \Longleftrightarrow x>1 \end{array}\right.$$

Donc on obtient pour $f\,:\,x \longmapsto f(x)=2x\mathrm{e}^{-x+3}$:

x	0	α	1	β	7
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$ 10	$\nearrow$ $2\mathrm{e}^2 \approx 14.8$	$\searrow$ 10	$\searrow$ $14\mathrm{e}^{-4} \approx 0.26$

2. b. Calculer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;7]$.

Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;7]$ est $2\mathrm{e}^2$, il est atteint pour $x=1$.

3.

3. a. Justifier que l'équation $f(x)=10$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0\,;7]$ que l'on notera α et β avec $\alpha<\beta$.

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

***Remarque** : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- **Application du corollaire sur $[0\,;1]$** :
  - La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[0\,;1]$;
  - Le réel $k=10$ est compris entre $f(0)=0$ et $f(1)=2\mathrm{e}^2 \approx 14,8$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x)=10$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;1]$.
- **Application du corollaire sur $[1\,;7]$** :
  - La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[1\,;7]$;
  - Le réel $k=10$ est compris entre $f(7)\approx 0,26$ et $f(1)=2\mathrm{e}^2 \approx 14,8$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x)=10$ admet une solution unique β sur l'intervalle $[1\,;7]$.

3. b. On admet que $\alpha \approx 0,36$ à 10^{-2} près. Donner une valeur approchée de β à 10^{-2} près.

Pour avoir un encadrement de β, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(2,16) & \approx & 10,007 > 10 \\ f(2,17) & \approx & 9,95 < 10 \end{array}\right., \text{ donc } 2,16 < \beta < 2,17.$$

Une valeur approchée de β à 0.01 près est donc $\underline{\beta \approx 2,16}$.

4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;7]$ par : $F(x) = (-2x-2)\mathrm{e}^{-x+3}$.

4. a. Justifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;7]$.

$$F : \begin{cases} [0\,;7] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x) = (-2x-2)\times \mathrm{e}^{-x+3} \end{cases}$$

La fonction F est dérivable sur $[0\,;7]$.
La fonction F est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0\,;7]\ ;\ F(x) = u(x)\times v(x)\ :\ \begin{cases} u(x) = (-2x-2) & ; & u'(x) = -2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x+3} & ; & v'(x) = -\mathrm{e}^{-x+3} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;7],\ F'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) \\ F'(x) &= -2\times \mathrm{e}^{-x+3} + (-2x-2)\times\left(-\mathrm{e}^{-x+3}\right) \\ F'(x) &= (-2+2x+2)\,\mathrm{e}^{-x+3} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\,;7]\ ;\ F'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x+3} = f(x)}$$

Donc F est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;7]$.

4. b. Calculer la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$.
La fonction f est positive (et continue) sur $[1\,;3]$ donc l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1) \\ &= (-6-2)\mathrm{e}^{-3+3} - (-2-2)\mathrm{e}^{-1+3} \\ &= -8\mathrm{e}^0 + 4\mathrm{e}^2 \\ \mathscr{A} &= \underline{\left(4\,\mathrm{e}^2 - 8\right)\ \text{u.a.}} \end{aligned}$$

5. La fonction f étudiée modélise le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x centaines d'objets (x compris entre 0 et 7).

5. a. Calculer la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près, lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets.
La valeur moyenne du bénéfice lorsque l'entreprise vend entre 1 centaine et 3 centaines d'objets est (en milliers d'euros) :

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{3-1}\times\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\times\left(4\,\mathrm{e}^2 - 8\right) \\ m &\approx \underline{10{,}778} \end{aligned}$$

Donc la valeur moyenne du bénéfice lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets est de <u>10 778 euros</u> (arrondi à l'euro).

5. b. L'entreprise souhaite que son bénéfice soit supérieur à 10 000 euros. Déterminer le nombre d'objets possibles que l'entreprise devra vendre pour atteindre son objectif.
On cherche donc à résoudre l'inéquation $f(x) > 10$. D'après la question **(3.a.)** et les variations de f on a :

$$f(x) > 10 \Longleftrightarrow x \in \left]\alpha\,;\beta\right[\ \text{ avec }\ \begin{cases} \alpha \approx 0{,}36\ \text{ et }\ f(0{,}36) \approx 10{,}09 > 10 \\ \beta \approx 2{,}16\ \text{ et }\ f(2{,}16) \approx 10{,}007 > 10 \end{cases}$$

L'entreprise doit donc vendre entre 0,36 centaine et 2,16 centaines soit <u>entre 36 et 216 objets</u> pour que son bénéfice soit supérieur à 10 000 euros.

Fin du devoir