Math93.com

Devoir Surveillé n°3

Terminale ES Spé

Graphes Probabilistes

Durée 1 heure - Coeff. 3
Noté sur 20 points

Exercice 1. — 14 points

Une municipalité vient de mettre en place le service « vélo en liberté ». Il s'agit d'un service de location de vélos à la journée.
Les vélos sont disponibles sur deux sites A et B et doivent être ramenés en fin de journée indifféremment dans l'un des deux sites. Après une étude statistique, on considère que :

- si un vélo est loué sur le site A, la probabilité d'être ramené en A est $0,6$;
- si un vélo est loué sur le site B, la probabilité d'être ramené en B est $0,7$.

Les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2} *près.*

1. En notant respectivement A et B les états « le vélo est en A » et « le vélo est en B », traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Donner M la matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre A, B.

3. Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) la probabilité qu'un vélo quelconque soit, après n jours, sur le site A (respectivement sur le site B).
On note P_n la matrice correspondant à l'état probabiliste après n jours :

$$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$$

Le premier jour, tous les vélos sont distribués également sur les deux sites. On a donc :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

3. a. On donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}.$$

Calculer P_2 en donnant le détail des calculs matriciels.

3. b. Calculer P_4 et interpréter le résultat dans le contexte du problème.

3. c. Déterminer l'état stable du graphe, noté $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.

3. d. Tous les mois, un véhicule est affecté à la redistribution des vélos afin de rétablir au mieux la répartition initiale qui était de 70 vélos sur chaque site. La municipalité envisage d'affecter un véhicule pouvant contenir 12 vélos.
Ce choix parait-il adapté à la situation ?

TSVP

Exercice 2. — 6 points

Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H.
Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

- A désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur A » ;
- H désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur H ».

La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre A et H, est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe probabiliste associé à la matrice M.

2. Donner la signification du nombre $0,95$ dans la matrice M.
Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité de l'évènement :

  « La semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures chez le fournisseur A » ;
- b_n la probabilité de l'évènement :

  « La semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures chez le fournisseur H » ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & h_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste pour la semaine n.

3. Vérifier que la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ correspond à l'état stable du système. En donner une interprétation.

4. On donne :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

et on rappelle que $P_k = P_0 \times M^k$, pour k entier naturel.

Déterminer la semaine où, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur H.