



Math93.com

# Devoir Surveillé n°3

## Correction

### TS

#### Suites et complexes

Durée 2 heures - Coeff. 10

Noté sur 20 points

*L'usage de la calculatrice est autorisé.*

### Exercice 1. ROC

1 point

Démontrer l'une des affirmations de théorème suivant :

**Théorème 1** (Suite croissante et non majorée : ROC)

1. Toute suite **croissante et non majorée** diverge vers  $+\infty$ .
2. Toute suite **décroissante et non minorée** diverge vers  $-\infty$ .



### Corrigé

Soit  $(u_n)$  une suite croissante et non majorée.

Soit  $A$  un réel.

- La suite  $(u_n)$  n'est pas majorée par  $A$  donc il existe un entier  $p$  tel que  $u_p > A$ .
- La suite  $(u_n)$  est croissante donc pour tout  $n \geq p$ , on a  $u_n \geq u_p$  et donc :

$$\begin{cases} u_p > A \\ u_n \geq u_p \end{cases} \implies u_n \geq u_p > A$$

- On vient de montrer que l'intervalle  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang  $p$ . Donc la suite  $(u_n)$  est divergente vers  $+\infty$ .

### Exercice 2. De l'importance du premier terme

9.5 points

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Soit  $a$  un réel positif.

On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = a$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , suivant différentes valeurs de son premier terme  $u_0 = a$ .

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , pour  $a = 2, 9$  puis pour  $a = 3, 1$ .



### Corrigé

- ⚡ Avec  $a = 2,9$  il semble que la suite  $(u_n)$  soit décroissante et tende vers 1.
- ⚡ Avec  $a = 3,1$  il semble que la suite  $(u_n)$  soit croissante et diverge vers  $+\infty$ .

2. Dans cette question, on suppose que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ .

2. a. En remarquant que

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$$

montrer que :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$$



### Corrigé

⚡ Les termes  $u_n$  et  $u_{n+1}$  ayant pour limite  $\ell$  donc :

- On a  $u_{n+1}$  a pour limite  $\ell$  donc :
- Par ailleurs  $u_n$  ayant pour limite  $\ell$  on a par opération sur les limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$$

- Donc par unicité de la limite on a :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$$

2. b. Montrer que les valeurs possibles de  $\ell$  sont 1 et 3.



### Corrigé

$$\ell = \frac{1}{2}\ell - \ell + \frac{3}{2} \iff 2\ell = \ell^2 - 2\ell + 3 \iff \ell^2 - 4\ell + 3 = 0$$

⚡ L'expression  $(\ell^2 - 4\ell + 3)$  est un expression du second degré de la forme  $(a\ell^2 + b\ell + c)$ . Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{array} \right. \implies \Delta = 4 > 0$$

⚡ Le discriminant  $\Delta$  étant positif, la fonction polynôme du second degré  $\ell \mapsto (\ell^2 - 4\ell + 3)$  admet deux racines réelles distinctes :

$$\ell_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \ell_2 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3$$

⚡ Si la suite converge cela ne peut être que vers 1 ou 3.

3. Dans cette question, on prend  $a = 2,9$ .

3. a. Montrer que  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .



### Corrigé

⚡  $a = 2,9$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sur cet intervalle :

⚡  $f'(x) = x - 1$ ; donc  $f'(x) \geq 0$  pour  $x \geq 1$  : la fonction  $f$  est croissante sur  $[1; +\infty[$ .

3. b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n$$



### Corrigé

Notons pour  $n$  entier  $P(n)$  la propriété  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .

Initialisation :  $u_0 = 2,9$  et  $u_1 : \frac{1}{2} \times 2,9^2 - 2,9 + \frac{3}{2} = 2,805$ .

On a bien  $1 \leq u_1 \leq u_0$  et donc  $P(0)$  est vraie.

Hérédité : supposons que pour  $n \in \mathbb{N}$ , on ait :  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$  :

puisque la fonction  $f$  est croissante sur  $[1 ; +\infty[$ , les images par  $f$  des trois termes de cet encadrement sont rangés dans le même ordre :

$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

Soit avec  $f(1) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 1$  :

$$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$  et donc héréditaire.

On a montré que l'encadrement est vrai au rang 0 et que s'il est vrai au rang  $n$ , il l'est aussi au rang  $n+1$ .

Conclusion : la propriété est vraie au rang  $n=0$  et héréditaire, donc d'après le principe de récurrence on a démontré que : pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .

3. c. Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.



### Corrigé

- D'après le résultat précédent la suite  $(u_n)$  décroît et est minorée par 1, elle est donc convergente vers un nombre  $\ell \geq 1$ .
- On a montré lors de la question (2.b) que les seules limites possibles sont 1 et 3.
- Puisqu'elle est décroissante et majorée par son premier terme  $u_0 = 2,9$ , son unique limite possible est  $\ell = 1$ .

4. Dans cette question, on prend  $a = 3,1$  et on admet que la suite  $(u_n)$  est croissante.

4. a. À l'aide des questions précédentes montrer que la suite  $(u_n)$  n'est pas majorée.



### Corrigé

- On a vu que si la suite converge ce ne peut être que vers 1 ou 3, ce qui n'est pas possible puisque le premier terme est  $u_0 = 3,1$  et que la suite est croissante, la suite n'est donc pas convergente.
- Puisque la suite est croissante, si elle était majorée, elle serait convergente d'après théorème démontré dans l'exercice 1, donc la suite n'est pas majorée.

4. b. En déduire le comportement de la suite  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .



### Corrigé

La suite  $(u_n)$  est croissante et non majorée, par conséquent d'après le théorème démontré dans l'exercice 1, elle diverge vers  $+\infty$ . On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

4. c. L'algorithme présenté en annexe calcule le plus petit rang  $p$  pour lequel  $u_p > 10^6$ .

Compléter cet algorithme.

$P$  est un nombre entier et  $U$  est un nombre réel.


**Corrigé**


```

P ← 0
U ← 3, 1

Tant que U ≤ 106
  P ← P + 1
  U ←  $\frac{1}{2}U^2 - U + \frac{3}{2}$ 
Fin Tant que
  
```

Rem. L'algorithme s'arrête à  $u_9$ .

**Exercice 3. Points alignés**
**9.5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes  $z$  non nuls tels que les points d'affixes  $1$ ,  $z^2$  et  $\frac{1}{z}$  soient alignés.

Sur le graphique fourni en annexe, le point A a pour affixe 1.

**Partie A : étude d'exemples**
**1. Un premier exemple**

Dans cette question, on pose  $z = i$ .

1. a. Donner la forme algébrique des nombres complexes  $z^2$  et  $\frac{1}{z}$ .


**Corrigé**


$$z^2 = i^2 = \underline{-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = \underline{-i}$$

1. b. Placer les points  $N_1$  d'affixe  $z^2$ , et  $P_1$  d'affixe  $\frac{1}{z}$  sur le graphique donné en annexe.

On remarque que dans ce cas les points A,  $N_1$  et  $P_1$  ne sont pas alignés.

**2. Une équation**

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue  $z$  :  $z^2 + z + 1 = 0$ .


**Corrigé**


Dans cette équation du second degré on a :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

L'équation admet donc deux complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \bar{z}_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

## 3. Un deuxième exemple

Dans cette question, on pose :  $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

3. a. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes  $z^2$  et  $\frac{1}{z}$ .



## Corrigé

On a :

$$z^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. b. Placer les points  $N_2$  d'affixe  $z^2$  et  $P_2$ , d'affixe  $\frac{1}{z}$  sur le graphique donné en annexe.  
On remarque que dans, ce cas les points A,  $N_2$  et  $P_2$  sont alignés.

## Partie B

Soit  $z$  un nombre complexe non nul.

On note  $N$  le point d'affixe  $z^2$  et  $P$  le point d'affixe  $\frac{1}{z}$ .

1. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :

$$z^2 - \frac{1}{z} = (z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right).$$



## Corrigé

Pour tout complexe  $z$  différent de 0 :

$$\begin{aligned} (z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right) &= z^2 - z + z - 1 + 1 - \frac{1}{z} \\ &= z^2 - \frac{1}{z} \end{aligned}$$

$$z^2 - \frac{1}{z} = (z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

2. On rappelle que si,  $\vec{U}$  est un vecteur non nul et  $\vec{V}$  un vecteur d'affixes respectives  $z_{\vec{U}}$  et  $z_{\vec{V}}$ , les vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel  $k$  tel que  $z_{\vec{V}} = kz_{\vec{U}}$ .

En déduire que, pour  $z \neq 0$ , les points A,  $N$  et  $P$  définis ci-dessus sont alignés si et seulement si  $z^2 + z + 1$  est un réel.



## Corrigé

On a pour  $z \neq 0$  :

$$\overrightarrow{PN} \left(z^2 - \frac{1}{z}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PA} \left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PN} \left(z^2 - \frac{1}{z}\right) \text{ colinéaire à } \overrightarrow{PA} \left(1 - \frac{1}{z}\right) &\iff (z=1) \text{ ou } (z \neq 1 \text{ et il existe } k \text{ tel que : } z^2 - \frac{1}{z} = k \left(1 - \frac{1}{z}\right)) \\ &\iff (z=1) \text{ ou } (z \neq 1 \text{ et } (z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right) = k \left(1 - \frac{1}{z}\right) \text{ d'après la question (B.1.)}) \\ &\iff (z=1) \text{ ou } (z \neq 1 \text{ et } (z^2 + z + 1 - k) \left(1 - \frac{1}{z}\right) = 0) \\ &\iff (z=1) \text{ ou } (z \neq 1 \text{ et } (z^2 + z + 1) = k) \\ &\iff (z=1) \text{ ou } (z \neq 1 \text{ et } (z^2 + z + 1) \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Or si  $z = 1$ , alors  $z^2 + z + 1 = 3$  est bien réel donc on a donc bien démontré que pour  $z \neq 0$ , les points  $A, N$  et  $P$  sont alignés si et seulement si  $z^2 + z + 1$  est réel.

3. On pose  $z = x + iy$ , où  $x$  et  $y$  désignent des nombres réels.

Justifier que :

$$z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$$



Corrigé



$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= (x + iy)^2 + x + iy + 1 \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy + 1 \\ &= \underline{x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)} \end{aligned}$$

4.

4. a. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z \neq 0$  tels que les points  $A, N$  et  $P$  soient alignés.



Corrigé

On a montré à la question (B.2.) que pour  $z \neq 0$ , les points  $A, N$  et  $P$  sont alignés si et seulement si  $z^2 + z + 1$  est réel. Or d'après la question (B.3.)  $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$  de ce fait :

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} &\iff x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y) \in \mathbb{R} \\ &\iff 2xy + y = 0 \\ &\iff y(2x + 1) = 0 \\ &\iff \boxed{y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Les solutions appartiennent donc aux droites d'équation  $y = 0$  et  $x = -\frac{1}{2}$ .

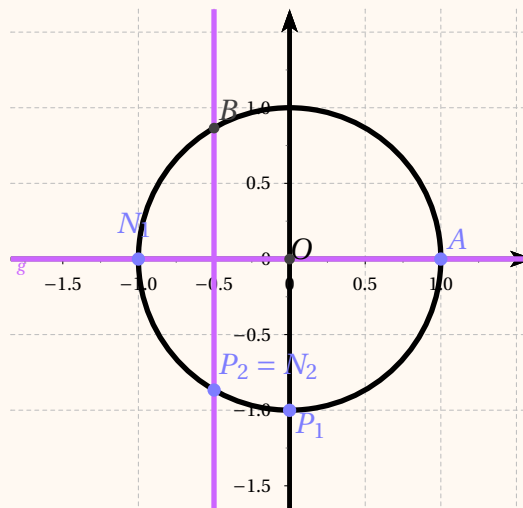
Il faut alors exclure le point solution correspondant à  $z = 0$ .

Conclusion : l'ensemble cherché est la réunion des droites d'équation  $y = 0$  et  $x = -0,5$  privé du point  $O$ .

4. b. Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.



Corrigé



Fin du devoir