

COURS

Chapitre 6

Fonctions : limites et croissances comparées

Version professeur

Sommaire du chapitre

I	Limites à l'infini	2
II	Limite en un réel a	4
III	Opérations sur les limites	6
IV	Limites de fonctions composées	8
V	Théorèmes de comparaison et d'encadrement	10
VI	Fonction exponentielle, limites et croissances comparées (ROC)	11
VII	Lever une forme indéterminée avec le nombre dérivé	14
VIII	Bilan : quelle méthode choisir ?	15



ROC – démonstration du programme

Pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

I Limites à l'infini

I.1 Limite infinie en $+\infty$

Définition 1 (Limite $+\infty$ en $+\infty$)

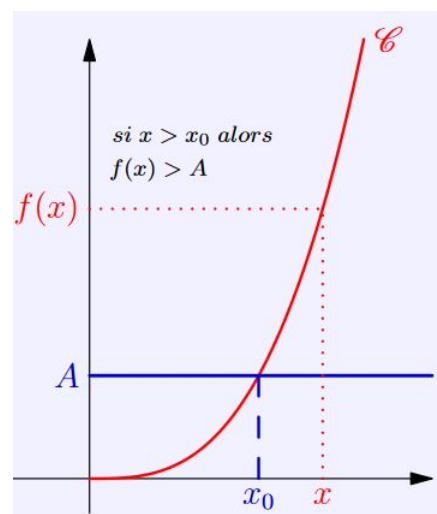
À retenir. Dire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

signifie que $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut lorsque x est suffisamment grand.

Formulation rigoureuse. Soit f définie au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire sur un ensemble contenant un intervalle $[a ; +\infty[$. Dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que, pour tout réel A , il existe un réel x_0 tel que, pour tout $x \in D_f$,

$$x \geq x_0 \implies f(x) \geq A.$$



Définition 2 (Limite $-\infty$ en $+\infty$)

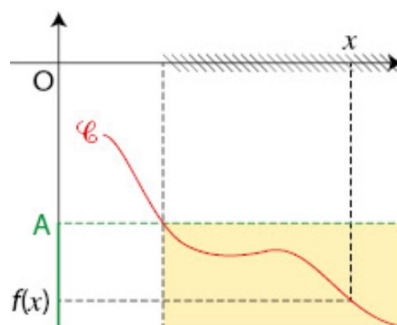
À retenir. Dire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

signifie que $f(x)$ devient aussi petit que l'on veut lorsque x est suffisamment grand.

Formulation rigoureuse. Dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ signifie que, pour tout réel A , il existe un réel x_0 tel que, pour tout $x \in D_f$,

$$x \geq x_0 \implies f(x) \leq A.$$



On définit de façon analogue les limites infinies en $-\infty$.

I.2 Limite finie à l'infini

Définition 3 (Limite finie en $+\infty$)

À retenir. Dire que

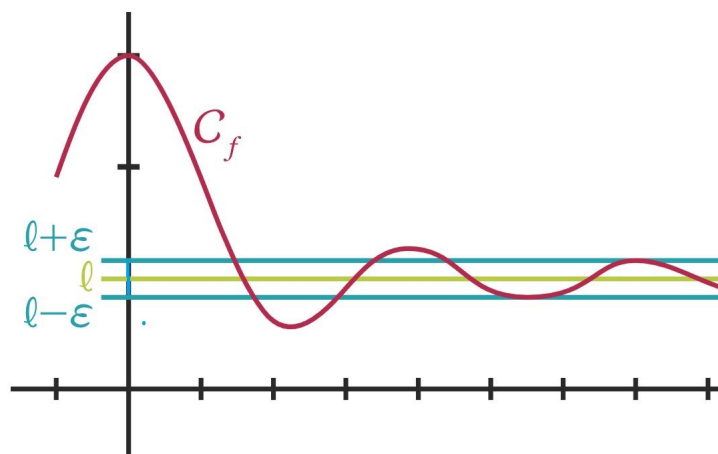
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

signifie que les valeurs de $f(x)$ se rapprochent aussi près que l'on veut de ℓ lorsque x est suffisamment grand.

Formulation rigoureuse. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel x_0 tel que, pour tout $x \in D_f$,

$$x \geq x_0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On définit de façon analogue une limite finie en $-\infty$.



Définition 4 (Asymptote horizontale)

Si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell,$$

alors la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe $\mathcal{C}_f$, respectivement en $+\infty$ ou en $-\infty$.

I.3 Limites de référence à l'infini

Fonction	$x \rightarrow +\infty$	$x \rightarrow -\infty$
x	$+\infty$	$-\infty$
$x^n, n \geq 1$ pair	$+\infty$	$+\infty$
$x^n, n \geq 1$ impair	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{x^n}, n \geq 1$	0	0
$\sqrt{x}$	$+\infty$	non définie
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0	non définie



Remarque

Pour $\frac{1}{x^n}$, la limite vaut bien 0 en $\pm\infty$, quel que soit $n \geq 1$. En revanche, le **signe** de la fonction au voisinage de $-\infty$ dépend de la parité de n .

II Limite en un réel a

II.1 Limite infinie en un réel

Définition 5 (Limite infinie en a)

À retenir. Dire que

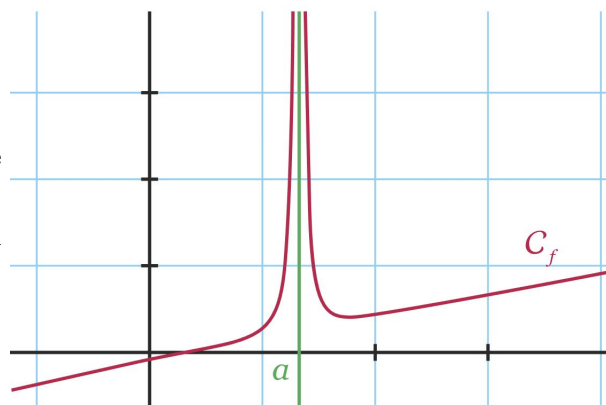
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

signifie que $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut lorsque x se rapproche suffisamment de a .

Formulation rigoureuse. Pour tout réel A , il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in D_f$,

$$0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > A.$$

On définit de façon analogue une limite égale à $-\infty$.



Définition 6 (Asymptote verticale)

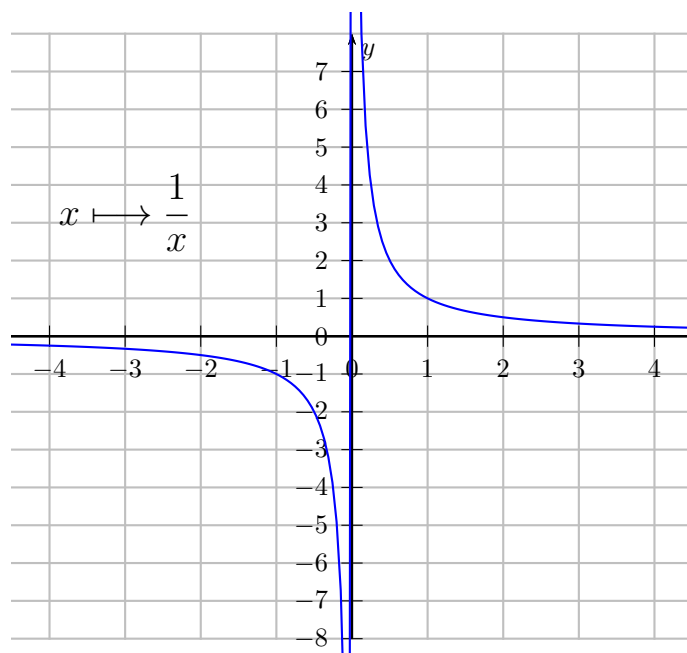
Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers a d'au moins un côté, alors la droite d'équation

$$x = a$$

est une **asymptote verticale** à la courbe $\mathcal{C}_f$.

II.2 Limites à droite et à gauche

Les limites peuvent être différentes suivant que x tend vers a par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures. Pour la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$:



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Fonction	$x \rightarrow 0^+$	$x \rightarrow 0^-$
$\frac{1}{x^n}, n \text{ pair}$	$+\infty$	$+\infty$
$\frac{1}{x^n}, n \text{ impair}$	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$+\infty$	non définie

II.3 Limite finie en un réel

Définition 7 (Limite finie ℓ en a)

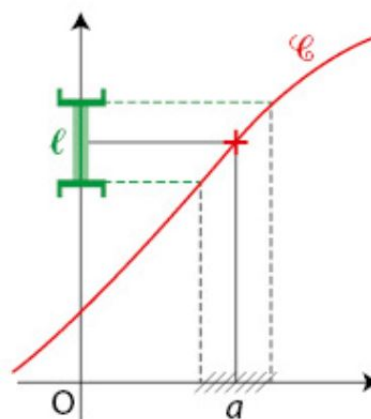
À retenir. Dire que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

signifie que $f(x)$ se rapproche aussi près que l'on veut de ℓ lorsque x se rapproche suffisamment de a .

Formulation rigoureuse. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in D_f$,

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$



II.4 Limites usuelles en un réel



Exemple

Soit a un réel. On admet les résultats suivants :

- si $a \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$;
- si P est un polynôme, $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$;
- si F est une fonction rationnelle définie en a , $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$;
- $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$;
- $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$;
- $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$.

Ces résultats seront reliés à la notion de continuité.

III Opérations sur les limites

Dans les tableaux suivants, ℓ et ℓ' désignent des nombres réels.

III.1 Somme

$\lim f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Le cas $+\infty + (-\infty)$, ou de manière équivalente $\infty - \infty$, est une forme indéterminée.

III.2 Produit

$\lim f$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim(fg)$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

Dans les cas infinis, le signe se détermine avec la règle des signes. Le cas $0 \times \infty$ est une forme indéterminée.

III.3 Quotient

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	0
$\lim\left(\frac{f}{g}\right)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	F.I.

Le cas $\frac{\infty}{\infty}$ est également une forme indéterminée.



Remarque

Quotient par une quantité qui tend vers 0. Si le numérateur tend vers un réel non nul et le dénominateur tend vers 0^+ ou 0^- , le quotient admet une limite infinie. Son signe se détermine avec la règle des signes. Par exemple :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell > 0 \\ \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0^+ \end{cases} \quad \text{par quotient} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty}.$$

Si le signe du numérateur ou du dénominateur change, on applique simplement la règle des signes.

III.4 Les quatre formes indéterminées

Une forme indéterminée ne signifie pas que la limite n'existe pas.

Elle signifie seulement que les règles usuelles ne permettent pas de conclure directement.

$$\boxed{\infty - \infty} \quad \boxed{0 \times \infty} \quad \boxed{\frac{0}{0}} \quad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

III.5 Exemple de rédaction

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$$f(x) = \frac{1-x}{x-2}.$$

- À droite de 2 :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (1-x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0^+ \end{cases} \quad \text{par quotient} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty}.$$

- À gauche de 2 :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} (1-x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0^- \end{cases} \quad \text{par quotient} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty}.$$

La droite d'équation $x = 2$ est donc une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

À vous de jouer

Soit g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$g(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{x-1}.$$

Étudier les limites de g en 1 à droite et à gauche en utilisant la même rédaction synthétique.

III.6 Méthode : lever une forme indéterminée

Méthode

1. **Identifier** la forme indéterminée.
2. **Transformer** l'expression avec une méthode adaptée :
 - à l'infini : factoriser par le terme dominant ;
 - en présence de racines carrées : penser à la quantité conjuguée ;
 - pour une forme $\frac{0}{0}$ en a avec des polynômes : factoriser par $(x-a)$;
 - reconnaître éventuellement un taux d'accroissement ;
 - chercher un encadrement ou une comparaison.
3. **Reprendre** le calcul des limites sur l'expression transformée.

Remarque

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, on ne peut rien conclure a priori sur $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$ sans connaître le signe de $f(x)$ au voisinage de a .

IV Limites de fonctions composées

IV.1 Fonction composée

Définition 8 (Composition)

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle contenant toutes les valeurs $u(x)$, pour $x \in I$. La fonction composée de u suivie de v , notée $v \circ u$, est définie par

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)).$$



Exemple

Pour $f(x) = \sqrt{1-x}$, on peut poser

$$u(x) = 1 - x \quad \text{et} \quad v(X) = \sqrt{X}.$$

Alors

$$f = v \circ u.$$

IV.2 Limite d'une fonction composée

Théorème 1 (Limite par composition)

Si

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow b} v(X) = \ell,$$

alors, lorsque les expressions ont un sens au voisinage considéré,

$$\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = \ell.$$

Les nombres a , b et ℓ peuvent être réels ou infinis selon les situations.

IV.3 Exemple de rédaction

On considère $f(x) = \sqrt{1-x}$, définie sur $] -\infty ; 1]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x = +\infty \\ \lim_{\textcolor{red}{X} \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array} \right. \quad \xRightarrow{\text{par composition}} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty}.$$

V Théorèmes de comparaison et d'encadrement

V.1 Limite et ordre

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I = [a; +\infty[$, avec a réel.

Propriété 1

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell'$ et $f \leq g$ sur l'intervalle I alors $\ell \leq \ell'$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell' \\ f \leq g \text{ sur } I \end{cases} \implies \ell \leq \ell'$$

V.2 Théorème d'encadrement dit « des gendarmes »

Théorème 2 (dit « des gendarmes »)

Soit ℓ un réel et f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle de la forme $I = [a; +\infty[$, telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in I, g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$



Preuve

Soit J un intervalle ouvert contenant ℓ .

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$, l'intervalle J contient tous les réels $g(x)$ pour x supérieur M_1 .

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$, l'intervalle J contient tous les réels $h(x)$ pour x supérieur M_2 .

On pose $M = \max(M_1; M_2)$, pour tout x supérieur à M , l'intervalle J contient tous les réels $g(x)$ et $h(x)$, or $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ donc J contient tous les réels $f(x)$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

V.3 Théorème de comparaison

Théorème 3

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$.

Si pour tout x de $[a; +\infty[$, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\begin{cases} \forall x \in I, g(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \xRightarrow{\text{par théorème comparaison}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Si pour tout x de $[a; +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

$$\begin{cases} \forall x \in I, g(x) \geq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \xRightarrow{\text{par théorème comparaison}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

VI Fonction exponentielle, limites et croissances comparées (ROC)

VI.1 Rappels de Première



L'essentiel sur la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est définie, dérivable, strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour tous réels x et y :

$$e^0 = 1, \quad e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}.$$

Sa dérivée vérifie

$$(e^x)' = e^x$$

et, si u est dérivable,

$$(e^u)' = u' e^u.$$

Enfin :

$$e^x < 1 \iff x < 0, \quad e^x = 1 \iff x = 0, \quad e^x > 1 \iff x > 0.$$

VI.2 Limites de la fonction exponentielle

Lemme 1 (A savoir redémontrer)

Pour tout réel x on a :

$$e^x \geq x + 1$$



Preuve

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - (x + 1)$.
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = e^x - 1$$

D'après les variations de la fonction exponentielle on a :

$$\begin{cases} f'(x) = e^x - 1 = 0 \iff x = 0 \\ f'(x) = e^x - 1 > 0 \iff x > 0 \end{cases} \implies f'(x) = e^x - 1 < 0 \iff x < 0$$

Donc puisque $f(0) = e^0 - (0 + 1) = 1 - 1 = 0$ on a :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f			

De ce fait la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - (x + 1) \geq 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$

Propriété 2 (Limites à savoir redémontrer)

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$

Donc la droite des abscisses (d'équation $y = 0$) est asymptote horizontale de la courbe de la fonction exponentielle en $-\infty$.

**Preuve**

1. Pour tout réel x on a montré que $e^x \geq x + 1$, on applique alors le théorème de comparaison.

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & e^x \geq x + 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty \end{cases} \quad \xRightarrow{\text{par comparaison}} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty}.$$

2. Pour tout réel x on a :

$$e^x = e^{-(-x)} = \frac{1}{e^{-x}}$$

On applique alors les propriétés de composition des limites :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \end{cases} \quad \xRightarrow{\text{par composition}} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty.$$

Comme $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0}.$$

VI.3 Croissances comparées (ROC)**Propriété 3** (Croissances comparées (ROC))

1. Pour tout entier naturel n :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$$

2. Conséquence (admis)

Pour tout entier naturel n :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0}$$

**ROC 1 : ROC Exigible**

Remarque : si $n \leq 0$ il n'y a pas de forme indéterminée, donc on va ici traiter le cas où $n \geq 1$.

D'après le lemme VI.2 page 11, pour tout réel X :

$$e^X \geq X + 1$$

Donc en appliquant cette inégalité à $X = \frac{x}{n+1}$ avec n entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{x}{n+1} + 1 \geq \frac{x}{n+1}$$

Donc

$$e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{1}{n+1} x$$

On compose alors par la fonction $x \mapsto x^{n+1}$, avec $n \geq 1$, qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
 Pour tout réel $x \geq 0$ (et $n \geq 1$) on obtient donc :

$$\underbrace{\left(\frac{x}{e^{n+1}} \right)^{n+1}}_{e^x} \geq \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}_k x^{n+1}$$

C'est à dire en posant $k = \left(\frac{1}{n+1} \right)^{n+1} > 0$ et puisque $\left(\frac{x}{e^{n+1}} \right)^{n+1} = \frac{x}{e^{n+1}} \times (n+1) = e^x$:

$$\left(\frac{x}{e^{n+1}} \right)^{n+1} = e^x \geq k x^{n+1}$$

Et donc

$$e^x \geq x^n \times k x \implies \frac{e^x}{x^n} \geq k x$$

On va conclure en invoquant le théorème de comparaison :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{e^x}{x^n} \geq k x \text{ avec } k > 0 \text{ et } n \geq 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} k x = +\infty \text{ car } k > 0 \end{array} \right. \implies \text{par théorème de comparaison } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

VII Lever une forme indéterminée avec le nombre dérivé

L'utilisation de la définition du nombre dérivé.

VII.1 Rappel de première

Propriété 4

1. Le réel $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a ;
2. Le réel $f'(a)$ est la limite quand h tend vers 0 du taux $t(h)$:

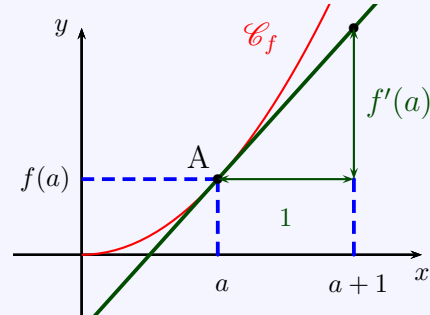
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

3. Le réel $f'(a)$ est la limite quand x tend vers a de :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

4. Le réel $f'(a)$ est le coefficient directeur de la **tangente à la courbe** $\mathcal{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ et l'équation de cette tangente est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



VII.2 Application

Propriété 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$



Preuve

Il s'agit de la définition du nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0. En effet on sait que la fonction exponentielle est dérivable en 0 et que $(e^x)' = e^x$ donc en notant $f(x) = e^x$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = e^0 = 1$$

VII.3 Bilan des limites de la fonction exponentielle

Propriété 6 (Limites liées à la fonction exponentielle)

• Limites usuelles.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

• Conséquence du nombre dérivé en 0.

À savoir redémontrer.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

• Croissances comparées.

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \end{cases}$$

VIII Bilan : quelle méthode choisir ?

Situation rencontrée	Réflexe à avoir
Aucune forme indéterminée	Appliquer directement les opérations sur les limites.
$\frac{\infty}{\infty}$ à l'infini	Factoriser le numérateur et le dénominateur par leur terme dominant.
$\infty - \infty$ avec une racine	Utiliser une quantité conjuguée lorsque cela simplifie l'expression.
$\frac{0}{0}$ lorsque $x \rightarrow a$ avec des polynômes	Factoriser par $(x - a)$ puis simplifier.
Expression de la forme $v(u(x))$	Utiliser une limite par composition.
Expression difficile à calculer directement	Chercher une comparaison, une majoration/minoration ou un encadrement.
$\frac{e^x}{x^n}$ en $+\infty$ ou $x^n e^x$ en $-\infty$	Utiliser les croissances comparées.
Quotient ressemblant à $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$	Reconnaître un taux d'accroissement et utiliser le nombre dérivé.



Rédaction d'un calcul de limite

Dès que plusieurs limites interviennent, on privilégie la rédaction synthétique suivante :

$$\begin{cases} \text{limite du premier élément} \\ \text{limite du second élément} \end{cases} \xRightarrow{\text{théorème utilisé}} \boxed{\text{limite cherchée}}.$$

Cette présentation permet de faire apparaître clairement les hypothèses utilisées et la conclusion.