



Math93.com

DM - Terminale Spécialité

Suites implicites

Exercice 1. Famille d'équations

Le but de cet exercice est d'étudier pour n entier non nul l'équation (E_n) :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{n}$$

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- Étudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ et déterminer son maximum.



Corrigé

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Elle est de la forme u/v donc de dérivée $\frac{u'v - uv'}{v^2}$. Sur cet intervalle on obtient :

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Puisque le dénominateur x^2 est strictement positif sur $]0 ; +\infty[$, f' est du signe du numérateur $(1 - \ln x)$ et on a :

$$\begin{cases} 1 - \ln x = 0 \iff x = e \\ 1 - \ln x > 0 \iff x < e \end{cases} \implies 1 - \ln x < 0 \iff x > e$$

On obtient puisque $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$:

x	0	e	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0 -
Variations de f		$\frac{1}{e}$	0

$-\infty$ \nearrow $\frac{1}{e}$ \searrow 0

Le calcul des limites est trivial, en $+\infty$ on applique les croissances comparées, et en 0^+ il n'y a pas de forme indéterminée.

- Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède sur $[1 ; e]$ une unique solution notée α_n .



Corrigé

- Sur $[1 ; e]$ la fonction f est strictement croissante et continue.
- Par ailleurs, puisque $n \geq 3$, on a

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} < \frac{1}{e}$$

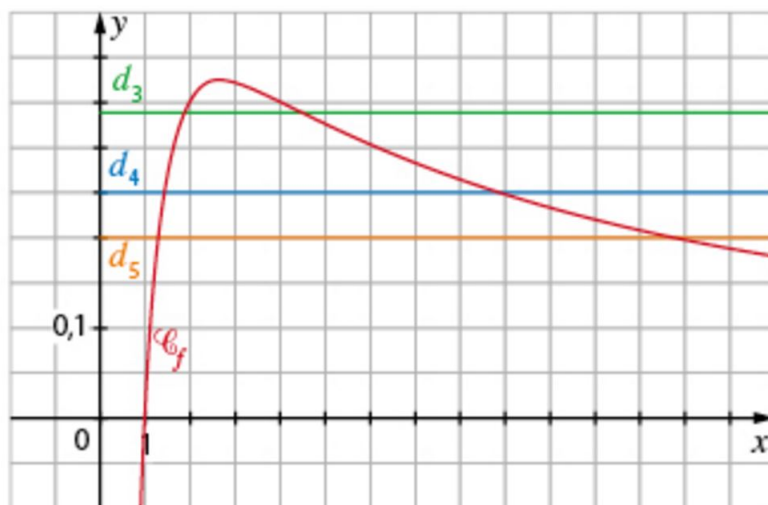
Donc $\frac{1}{n}$ est bien compris entre $f(1) = 0$ et $f(e) = \frac{1}{e}$.

- Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E_n) possède sur $[1 ; e]$ une unique solution notée α_n .

x	1	α_n	e
Variations de f		$\frac{1}{n}$ 	$\frac{1}{e}$

3. Sur le graphique ci-dessous sont tracés :

- la courbe \mathcal{C}_f ;
- les droites d_3 , d_4 et d_5 d'équations respectives : $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{5}$.



3. a. Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n) .



Corrigé

On remarque que pour $n \geq 3$, α_n est l'abscisse du point d'intersection de la droite d_n avec la courbe de f pour x compris entre 1 et e.

La suite (α_n) semble décroissante.

3. b. Comparer, pour tout entier $n \geq 3$ les nombre $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.



Corrigé

Pour tout entier n tel que $n \geq 3$:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

Or on sait que α_n est l'unique solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ sur $[1 ; e]$ donc $f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ et

$f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ ce qui nous donne :

$$f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1} < f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$$

3. c. Déterminer le sens de variation de la suite (α_n) .



Corrigé

On vient de montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 3$ on a :

$$f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$$

De ce fait puisque f est strictement croissante sur $]1 ; +e]$ et que α_n appartient à cet intervalle (d'après la question 2.) :

$$\alpha_{n+1} < \alpha_n$$

La suite (α_n) est strictement décroissante.

3. d. En déduire que (α_n) converge.



Corrigé

La suite (α_n) est décroissante et minorée par 1 car α_n appartient à $]1 ; e]$; elle est donc convergente vers une limite ℓ et $1 \leq \ell \leq e$.

4. On admet que pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que $1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n$ et que la suite (β_n) est croissante.

4. a. Établir que pour tout entier $n \geq 3$:

$$\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}$$



Corrigé

Par définition, pour $n \geq 3$ on a $1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n$ et :

$$f(\beta_n) = \frac{1}{n} \iff \frac{\ln \beta_n}{\beta_n} = \frac{1}{n} \iff \ln \beta_n = \frac{\beta_n}{n}$$

Or la suite (β_n) est croissante donc pour $n \geq 3$ on a :

$$\beta_n \geq \beta_3$$

En composant par la fonction, \ln qui est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* :

$$\ln \beta_n \geq \ln \beta_3$$

On applique alors la relation démontrée : $\ln \beta_n = \frac{\beta_n}{n}$ ce qui nous donne pour $n \geq 3$:

$$\begin{cases} \ln \beta_n = \frac{\beta_n}{n} \\ \ln \beta_n \geq \ln \beta_3 \end{cases} \implies \frac{\beta_n}{n} \geq \frac{\beta_3}{3} \iff \boxed{\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}}$$

4. b. En déduire la limite de la suite (β_n) .



Corrigé

Puisque $\beta_3 > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{\beta_3}{3} = +\infty$$

Et puisque $\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}$, le théorème de comparaison permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty}$$

↵ **Fin du devoir** ↻