

TD – EXERCICES

TD 6

Limites de fonctions

Sommaire du TD

I	Limites usuelles, asymptotes et formes indéterminées	2
II	Composition, comparaison et encadrement	6
III	Fonction exponentielle et croissances comparées	7
IV	Extraits du Bac	9

Thème I

Limites usuelles, asymptotes et formes indéterminées



Rappel – asymptotes

- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f .
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe de f .

Exercice 1 Lire des asymptotes dans un tableau de variations

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$. Déterminer les équations des asymptotes.

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
Variations de f	3			10
		0		
			$+\infty$	
			$-\infty$	

Exercice 2 Calculer des limites classiques et déterminer les asymptotes

Dans cet exercice, on précisera les éventuelles asymptotes aux courbes représentatives.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par

$$f(x) = \frac{6-x}{x-5}.$$

Étudier les limites de f en 5 à gauche et à droite, en $+\infty$ et en $-\infty$.

- 2.** Soit g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$g(x) = x^2 - x + \frac{1}{x-1}.$$

Étudier les limites de g en 1 à gauche et à droite, en $+\infty$ et en $-\infty$.

- 3.** Soit h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$h(x) = \frac{2x + 1}{(x - 1)^2}.$$

Étudier les limites de h en 1 à gauche et à droite, en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. Soit k définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1 ; 2\}$ par

$$k(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2}.$$

Étudier les limites de k en 1 à gauche et à droite, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 3 Lever une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ par factorisation



Méthode

Quand une fraction rationnelle conduit à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en a , on cherche à factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x - a)$, puis on simplifie avant de reprendre le calcul de la limite.

1. Soit f définie sur D_f par

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}.$$

- 1. a.** Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f .

1. b. Étudier la limite de f en 1.



Aide

Factoriser $x^2 - 3x + 2$ puis simplifier l'expression de f .

- 1. c.** Étudier les limites de f aux autres bornes de son ensemble de définition.

- 2.** Soit g définie sur D_g par

$$g(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15}.$$

- 2. a.** Déterminer D_g , l'ensemble de définition de g .

- 2. b.** Étudier la limite de g en 3.



Aide

Factoriser le numérateur et le dénominateur puis simplifier l'expression de g .

- 2. c.** Étudier les limites de g aux autres bornes de son ensemble de définition.

Exercice 4 Lever une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en transformant l'expression



Méthode

On cherche une transformation adaptée : factorisation remarquable, identité algébrique ou quantité conjuguée. L'objectif est de faire apparaître puis de simplifier le facteur responsable de la forme $\frac{0}{0}$.

1. 1. a. Montrer que, pour tout réel $x \neq 1$,

$$1 + x + x^2 + x^3 = \frac{x^4 - 1}{x - 1}.$$

1. b. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

- ## 2. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 2\sqrt{x}}{x - 4}.$$

[illegible]

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

1. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}.$$



Poser $h(x) = xf(a) - af(x)$ et calculer $h(a)$.

2. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

Exercice 6 Lever une indétermination avec la quantité conjuguée



Méthode

Lorsqu'une expression contient une racine carrée et conduit à une forme indéterminée, penser à multiplier par la quantité conjuguée afin de faire apparaître une identité remarquable.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 5}.$$

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

1. b. Montrer que, pour tout réel x ,

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5} - x}.$$

1. c. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

- 2.** Soit f définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(h) = \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}.$$

Démontrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) = \frac{1}{4}.$$

page 8/13

Thème II

Composition, comparaison et encadrement

Exercice 8 Utiliser une composition de limites



Rappel – fonction exponentielle

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

et

$\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto e^{3x+2}$ en utilisant une composition.
2. Calculer de la même façon les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :
 2. a. $x \mapsto e^{2x-1}$;
 2. b. $x \mapsto \frac{5}{e^{5x-3}}$;
 2. c. $x \mapsto e^{-4x-1}$.

Pour montrer qu'une fonction tend vers $+\infty$, on peut la minorer par une fonction qui tend vers $+\infty$. Pour montrer qu'elle tend vers $-\infty$, on peut la majorer par une fonction qui tend vers $-\infty$.

1. Retrouver par comparaison la limite en $+\infty$ de $x \longmapsto e^{3x+2}$.
2. Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes par comparaison.
 2. a. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
 2. b. $g(x) = x^5 + 10x + 3$.

Exercice 10 Utiliser le théorème des gendarmes

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$1 \leq 1 + \frac{1}{x} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2.$$

2. En déduire un encadrement de $f(x)$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 11 Comparer avec la partie entière



Rappel – partie entière

Pour tout réel x :

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}.$$

Ainsi :

$$x - 1 < |x| \leq x.$$

On note $E(x) = \lfloor x \rfloor$.

1. Comparer les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = E(x).$$

- 2.** En déduire les limites de g en $+\infty$ puis en $-\infty$.

Thème III

Fonction exponentielle et croissances comparées

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- **Limites usuelles.**

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

- Conséquence du nombre dérivé en 0.

À savoir redémontrer.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

- Croissances comparées.

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \end{cases}$$

Exercice 12 Combiner composition et croissance comparée

On ne peut utiliser que les limites du rappel ci-dessus.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{x}.$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
2. **2. a.** Vérifier que, pour tout réel $x \neq 0$,

$$g(x) = 2 \frac{e^{2x}}{2x}.$$

2. b. En déduire la limite de g en $+\infty$ en utilisant une composition.
3. Sur le même modèle, déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes :

3. a. $f(x) = \frac{e^{4x}}{5x}$;

3. b. $g(x) = \frac{e^{-5x}}{x}$;

3. c. $h(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$;

3. d. $k(x) = \frac{e^{x^2+1}}{x}$.

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 e^x + x - 1, \quad g(x) = e^{-x} + x^2 - x, \quad h(x) = \frac{e^x - x^{10}}{e^x - x^{100}}.$$

1. Étudier les limites de f .
2. Étudier les limites de g .
3. Étudier les limites de h .

Exercice 14 Transformer avant d'utiliser une croissance comparée

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions

$$f(x) = \frac{1 - 3e^x + e^{2x}}{e^x + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x(x - e^{-x})}{1 - x + e^x}.$$

1. Étudier les limites de f .
2. Étudier les limites de g .

Soit k un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\}$ par

$$f(x) = \frac{e^{-kx}}{k-x}.$$

1. Étudier, selon les valeurs de k , les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier les limites de f en k^- et en k^+ .

Extraits du Bac

Source bac : Bac S 2020 – Polynésie – 2 septembre 2020.

$$f(x) = x e^{-x^2+1}.$$
$$f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Exercice 17 [BAC] D'après Bac 2018 Nouvelle-Calédonie – exponentielle, encadrement et variations

Source bac : Bac S 2018 – Nouvelle-Calédonie – février 2018.

Partie A – Étude d’une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1. **1. a.** Étudier les variations de la fonction g .
1. **b.** Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α , et que $\alpha \in [-1 ; 0]$. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B – Étude de la fonction principale

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3) e^{-2x+1}.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

- 2. 2. a.** Démontrer que, pour tout $x > 1$,

$$1 < x < x^2 < x^3.$$

- 2. b.** En déduire que, pour $x > 1$,

$$0 < f(x) < 4x^3 e^{-2x+1}.$$

- 2. c.** On admet que, pour tout entier naturel n ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0.$$

Vérifier que, pour tout réel x ,

$$4x^3 e^{-2x+1} = \frac{e}{2} (2x)^3 e^{-2x},$$

puis montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 e^{-2x+1} = 0.$$

- 2. d.** Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

3. Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = (-2x^3 + x^2 - 1) e^{-2x+1}.$$

4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

[illegible]

↩ **Fin du TD** ↪