Corrigé de l'épreuve d'analyse et de probabilités
Concours Externe d'Agrégation Mathématiques 2012
abdelbaki.attioui@ gmail.com

1. Dimension finie

1.(1) Par récurrence sur n. Pour $n=2$, soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que $|a+b|=|a|+|b|$. Alors, $|a|^2+|b|^2+2|a||b|=|a+b|^2=(a+b)(\overline{a}+\overline{b})=|a|^2+|b|^2+2\Re e\,(\overline{a}b)$. Donc, $\Re e\,(\overline{a}b)=|a||b|$. Supposons que cette propriété est vraie pour n complexes ($n\geqslant 2$) et soit $(w_1,\cdots,w_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $|w_1+\cdots+w_{n+1}|=|w_1|+\cdots+|w_{n+1}|$. Soient j et ℓ dans $\{1,\cdots,n+1\}$ distincts, il existe au moins un $m\in\{1,\cdots,n+1\}$ distinct de j et de ℓ. On a :

$$|w_m|+\sum_{k\neq m}|w_k|=\sum_{k=1}^{n+1}|w_k|=\left|\sum_{k=1}^{n+1}w_k\right|=\left|w_m+\sum_{k\neq m}w_k\right|\leqslant|w_m|+\left|\sum_{k\neq m}w_k\right|\leqslant|w_m|+\sum_{k\neq m}|w_k|$$

Alors, $\left|\sum_{k\neq m}w_k\right|=\sum_{k\neq m}|w_k|$ et d'après l'hypothèse de récurrence $\Re e\,(\overline{w_j}w_\ell)=|w_j||w_\ell|$. D'où le résultat. On suppose que les w_j sont non nuls alors, pour tout $j\in\{1,\cdots,n\}$, il existe $\theta_j\in[0,2\pi[$ tel que $w_j=e^{i\theta_j}|w_j|$. Soient j et ℓ dans $\{1,\cdots,n\}$ distincts, on a alors $\overline{w_j}w_\ell=e^{i(\theta_\ell-\theta_j)}|w_j||w_\ell|$ et puisque $\Re e\,(\overline{w_j}w_\ell)=|w_j||w_\ell|$, alors $\cos(\theta_\ell-\theta_j)=1$. Mais, $|\theta_\ell-\theta_j|<2\pi$. Par suite, $\theta_\ell=\theta_j$. Soit $\theta=\theta_1$, alors pour tout $j\in\{1,\cdots,n\}$, $w_j=e^{i\theta}|w_j|$. Cette dérnière égalité est valable aussi si $w_j=0$.

1.(2) Si $a_{k,j}=0$ pour un certain couple (k,j). On considère l'élément e_j de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la $j$ième qui vaut 1. Alors, $e_j\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et la $k$ième coordonnée de Ae_j est nulle ce qui contredit l'hypothèse du théorème. Donc, tous les coefficients de la matrice A sont strictement positifs.

1.(3) Si $A|z|=|Az|$ alors, pour tout $k\in\{1,\cdots,n\}$, $\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}|z_j|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}z_j\right|$. Comme, d'après 1.(2), les coefficients $a_{k,j}$ sont strictement positifs, $\sum_{k=1}^{n}|a_{k,j}z_j|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}z_j\right|$ alors, d'après 1.(1), pour tout $k\in\{1,\cdots,n\}$, il existe $\theta_k\in[0,2\pi[$ tel que $a_{k,j}z_j=e^{i\theta_k}|a_{k,j}z_j|$ pour tout $j\in\{1,\cdots,n\}$. Mais, $a_{k,j}>0$ pour tous k et j dans $\{1,\cdots,n\}$. Donc, pour tout $k\in\{1,\cdots,n\}$, il existe $\theta_k\in[0,2\pi[$ tel que $z_j=e^{i\theta_k}|z_j|$ pour tout $j\in\{1,\cdots,n\}$. Soient k et k' dans $\{1,\cdots,n\}$ distincts, on a pour tout $j\in\{1,\cdots,n\}$ tel que $z_j\neq 0$, $z_j=e^{i\theta_k}|z_j|=e^{i\theta_{k'}}|z_j|$. Alors, $\theta_k=\theta_{k'}$ car $|\theta_k-\theta_{k'}|<2\pi$. Soit $\theta=\theta_1$, alors pour tout $j\in\{1,\cdots,n\}$, $z_j=e^{i\theta}|z_j|$ car l'égalité est aussi valable si $z_j=0$. Inversement, si pour tout $j\in\{1,\cdots,n\}$, $z_j=e^{i\theta}|z_j|$ alors, pour tout $k\in\{1,\cdots,n\}$, $\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}z_j=e^{i\theta}\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}|z_j|$. Par conséquent, pour tout $k\in\{1,\cdots,n\}$, $\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}|z_j|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}z_j\right|$. Donc, $A|z|=|Az|$.

1.(4) Soit $x\in\mathcal{C}$, $(Ax|e)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}x_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}x_j$ qui est une somme à termes positifs alors

$$0\leqslant(Ax|e)\leqslant\left(\max_{j\in\{1,\cdots,n\}}\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}\right)\sum_{j=1}^{n}x_j=(x|e)\left(\max_{j\in\{1,\cdots,n\}}\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}\right)$$

1.(5) On a $0\in\mathcal{E}$ car $Ae\in\mathcal{C}$ et $e\in\mathcal{C}\setminus\{0\}$. Soit $t_m=\min_{k\in\{1,\cdots,n\}}\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}$ alors, $t_m>0$ car Ae est à coordonnées strictement positives. De plus, pour tout $k\in\{1,\cdots,n\}$, $\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}-t_m\geqslant 0$ alors, $Ae-t_me\in\mathcal{C}$. Donc, $t_m\in\mathcal{E}$ en d'autres termes $\mathcal{E}$ est non réduit à $\{0\}$. Soit $t\in\mathcal{E}$, il existe $x\in\mathcal{C}\setminus\{0\}$ tel que $Ax-tx\in\mathcal{C}$. Pour tout $s\in[0,t]$ et pour tout $k\in\{1,\cdots,n\}$, $\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}x_j-sx_k\geqslant\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}x_j-tx_k\geqslant 0$. Alors, $Ax-sx\in\mathcal{C}$. Par suite, $s\in\mathcal{E}$. Donc, $\mathcal{E}$ est un intervalle. Soit $t>\|A\|=\sup\{\|Ax\|\ /\ \|x\|\leqslant 1\}$ (la norme considérée sur $\mathbb{R}^n$ est la norme sup). Soit $x\in\mathcal{C}\setminus\{0\}$, alors $\|x\|=x_k>0$ pour un certain $k\in\{1,\cdots,n\}$. Par suite, $t>\dfrac{\|Ax\|}{x_k}\geqslant\dfrac{\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}x_j}{x_k}$. Donc,

la kième coordonnée de $Ax - tx$ est strictement négative et alors $t \notin \mathcal{E}$. On en déduit que $\mathcal{E} \subset [0, \| A \|]$ et par conséquent, $\mathcal{E}$ est borné. Soit $(t_p)_p$ une suite d'élément de $\mathcal{E}$ convergente de limite un réel $t \geqslant 0$ car pour tout p, $t_p \geqslant 0$. Pour tout p, il exite $x_p \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ tel que $Ax_p - t_p x_p \in \mathcal{C}$. Pour tout p, on pose: $y_p = \frac{x_p}{\|x_p\|}$. La suite $(y_p)_p$ étant bornée on peut alors en extraire une sous suite convergente notée encore $(y_p)_p$. Soit $y = \lim_{p \leftarrow +\infty} y_p$. Il est clair que $\mathcal{C}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et que l'application $(t, x) \mapsto Ax - tx$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est continue et que pour tout p, $Ay_p - t_p y_p \in \mathcal{C}$ alors $Ay - ty \in \mathcal{C}$. Mais, $y \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ car $y \in \mathcal{C}$ et $\| y \| = 1$ par suite $t \in \mathcal{E}$. Donc, $\mathcal{E}$ est fermé.

1.(6) Soit $x \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ vérifiant $Ax - \rho x \in \mathcal{C}$. Si $y = Ax - \rho x \neq 0$, alors les coordonnées de Ax et de Ay sont strictement positives . Par suite, $\varepsilon = \min_{0 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} y_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j} > 0$ et on a alors, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} y_j - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j \geqslant 0$.

En d'autres termes, $Ay - \varepsilon Ax \in \mathcal{C}$. Mais, $Ay - \varepsilon Ax = A(Ax) - (\rho + \varepsilon) Ax$ et comme $Ax \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ alors $\rho + \varepsilon \in \mathcal{E}$ ce qui contredit le fait que $\rho = \max \mathcal{E}$. Donc, $Ax = \rho x$. On a $\rho \in \mathcal{E}$ car $\mathcal{E}$ est fermé. Il existe alors $v \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ tel que $Av - \rho v \in \mathcal{C}$. D'après ce qui précède, $Av = \rho v$. Donc, ρ est une valeur propre de A et v est en un vecteur propre associé à coordonnées strictement positives car $v = \dfrac{1}{\rho} Av$ et Av est à coordonnées strictement positives.

1.(7) Soit $z \in \mathbb{C}^n$. Si $Az = \rho z$ alors, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} z_j = \rho z_k$. En suite, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} |z_j| \geqslant \left| \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} z_j \right| = \rho |z_k|$. Ceci permet de dire que $A|z| - \rho |z| \in \mathcal{C}$. Alors, d'après 1.(6), si $z \neq 0$, $A|z| = \rho |z|$ puis $A|z| = |Az|$ (égalité valable si $z = 0$). D'après 1.(3), il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z_j = e^{i\theta} |z_j|$ pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$. $(z|v) = \sum_{j=1}^{n} \overline{z_j} v_j = e^{-i\theta} \sum_{j=1}^{n} |z_j| v_j = 0$. Alors, $\sum_{j=1}^{n} |z_j| v_j = 0$ somme à termes positifs et en plus tous les $v_j > 0$ alors tous les $z_j = 0$. Donc $z = 0$. Il est facile de voir que Vect$\{v\} \subset$Ker$(A - \rho 1)$. Soit $z \in$Ker$(A - \rho 1)$. Alors, $Az = \rho z$ et le théorème de la projection orthogonale permet d'écrire $z = z_1 + \mu v$ avec $(z_1|v) = 0$ et $\mu \in \mathbb{C}$. On en déduit que $Az_1 = \rho z_1$ et d'après ce qui précède $z_1 = 0$ et $z = \mu v \in$Vect$\{v\}$. Donc, Vect$\{v\}$ =Ker$(A - \rho 1)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, il existe $z \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $Az = \lambda z$. Alors $A|z| - |\lambda| |z| \in \mathcal{C}$ et $|z| \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ alors $|\lambda| \in \mathcal{E}$. Donc $|\lambda| \leqslant \rho$. Maintenant si $\lambda \neq \rho$ alors $|\lambda| < \rho$. En effet, si $|\lambda| = \rho$, d'après 1.(6), $A|z| = \rho |z|$. Mais, $A|z| = \rho |z| = |Az|$. D'après 1.(3), il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta} |z|$. Par suite, $\lambda z = Az = e^{i\theta} A|z| = e^{i\theta} \rho |z| = \rho z$, puis $\lambda = \rho$ ce qui est absurde. D'où le résultat.

1.(8) Soit w un vecteur propre de A à coordonnées positives. Comme A et A^T ont les mêmes valeurs propres, il existe $\phi \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $A^T \phi = \rho \phi$. En fait, ϕ peut être choisi à coordonnées strictement positives. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ la valeur propre de A telle que $Aw = \lambda w$, alors $(Aw|\phi) = \left(w|A^T \phi\right)$ ce qui donne $\lambda (w|\phi) = \rho (w|\phi)$ et comme w et ϕ sont à coordonnées strictement positives on a $(w|\phi) > 0$ et alors $\lambda = \rho$. D'après 1.(7), $w \in$Vect$\{v\}$. D'où le résultat.

1.(9) Le problème de Cauchy en question admet une solution unique y définie sur $\mathbb{R}$ car l'équation différentielle est autonome $\frac{d}{dt} y = Ay = f(y)$ avec f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui même vérifiant la condition de Cauchy-Lipschitz (f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A). Il est bien connu que $y(t) = e^{tA} y_{Init}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $t \geqslant 0$, alors tous les coefficients de la matrice e^{tA} sont strictement postifs car la matrice A est à coefficients strictement postifs et $e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^k}{k!} A^k$. Comme y_{Init} est à coordonnées positives alors les coordonnées de $y(t)$ sont postives.

1.(10) Soit $t \in \mathbb{R}$, $(y(t)|\phi) = \left(e^{tA} y_{Init}|\phi\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^k}{k!} A^k y_{Init}|\phi \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^k}{k!} \left(A^k y_{Init}|\phi\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^k}{k!} \left(y_{Init}|(A^k)^T \phi\right)$.

Puisque $(A^k)^T \phi = (A^T)^k \phi = \rho^k \phi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors $(y(t)|\phi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^k}{k!} \left(y_{Init}|\rho^k \phi\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(\rho t)^k}{k!} (y_{Init}|\phi) =$ $e^{\rho t} (y_{Init}|\phi)$. D'où le résultat.

1.(11) Soit $j \in \{1, \cdots, n\}$. Pour tout $t \geqslant 0$, $e^{-\rho t} y_j(t) \phi_j \leqslant (y(t)|\phi) e^{-\rho t} = (y_{Init}|\phi)$. Comme $\phi_j > 0$ alors $e^{-\rho t} y_j(t) \leqslant \frac{1}{\phi_j} (y_{Init}|\phi)$. Donc l'application $t \mapsto e^{-\rho t} y_j(t)$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

1.(12) Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, comptées avec ordre de multiplicité. Soit d la matrice diagonale diag$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Comme $\sigma(A) = \sigma(D)$ et D diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que $D = PdP^{-1}$. D'autre part, la matrice N étant nilpotente, alors $N^k = 0$ pout tout $k > n$ car l'indice de nilpotence $\leqslant n$. Soit $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = e^{tA}y_{Init} = e^{tD}e^{tN}y_{Init}$ car les matrices D et N commutent. Par un calcul immédiat, $e^{tD} = Pe^{td}P^{-1} = P\text{diag}(e^{t\lambda_1}, \cdots, e^{t\lambda_n})P^{-1}$ et $e^{tN} = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}N^k$. On a alors $e^{tA} = P\text{diag}(e^{t\lambda_1}, \cdots, e^{t\lambda_n})P^{-1}\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}N^k$. Soit $j \in \{1, \cdots, n\}$, la jième ligne de la matrice e^{tA} s'écrit alors sous la forme $\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(c_{j,1}^{(k)}e^{t\lambda_1} \cdots c_{j,n}^{(k)}e^{t\lambda_n})$ avec les $c_{j,\ell}^{(k)} \in \mathbb{R}$. Par suite, $y_j(t) = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}c_{j,\ell}^{(k)}e^{t\lambda_\ell}(y_{Init})_\ell = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} P_{\lambda,j}(t)e^{t\lambda}$ avec les $P_{\lambda_\ell,j}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}c_{j,\ell}^{(k)}(y_{Init})_\ell$ des fonctions polynomiales.

1.(13) Soit $j \in \{1, \cdots, n\}$, $e^{-\rho t}y_j(t) = P_{\rho,j}(t) + \sum_{\lambda\in\sigma(A)\setminus\{\rho\}} P_{\lambda,j}(t)e^{-t(\rho-\lambda)}$. D'après 1.(7) $|\lambda| < \rho$, pour tout $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{\rho\}$ et d'après 1.(11) l'application $t \mapsto e^{-\rho t}y_j(t)$ est bornée sur $[0, +\infty[$ alors il en est de même pour l'application polynomiale $P_{\rho,j}$ sur $[0, +\infty[$. Donc, l'application polynomiale $P_{\rho,j}$ est constante sur $\mathbb{R}$.

1.(14) D'après 1.(13), $\lim_{t\to+\infty} e^{-\rho t}y(t) = (P_{\rho,1}(0) \cdots P_{\rho,n}(0))$ que l'on note par w. D'après 1.(10), $(e^{-\rho t}y(t)|\phi) = (y_{Init}|\phi)$ alors $(w|\phi) = (y_{Init}|\phi)$. Mais, $Ay(t) = \frac{d}{dt}y(t) = (y_j'(t))_{1\leqslant j\leqslant n} = \left(\sum_{\lambda\in\sigma(A)} \left(P_{\lambda,j}'(t) + \lambda P_{\lambda,j}(t)\right)e^{t\lambda}\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$.

Alors, $e^{-\rho t}Ay(t) = \rho w + \left(\sum_{\lambda\in\sigma(A)\setminus\{\rho\}} \left(P_{\lambda,j}'(t) + \lambda P_{\lambda,j}(t)\right)e^{-t(\rho-\lambda)}\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$. On en déduit, avec le mêmes arguments, que $\lim_{t\to+\infty} e^{-\rho t}Ay(t) = \rho w$. Ceci donne $Aw = \rho w$, par suite $w \in \text{Vect}\{v\}$ d'après 1.(7). Ces égalités permettent de dire que $w = (y_{Init}|\phi)\, v$. Conclusion, $\lim_{t\to+\infty} e^{-\rho t}y(t) = (y_{Init}|\phi)\, v$

2. Quelques éléments d'analyse spectrale

2.(1) Si $\| T \|_{\mathcal{L}(E)} < 1$ alors la série de terme général T^k converge. Soit $S = \sum_{k=0}^{+\infty} T^k$. Par ailleurs, un simple calcul donne $(1 - T)\sum_{k=0}^{N} T^k = 1 - T^{N+1}$, pour tout $N \in \mathbb{N}$. Ensuite on aura, quand N tend vers $+\infty$, $(1 - T)S = 1$. Donc, $1 - T$ est bijective et $(1 - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} T^k$.

2.(2) Si $|\lambda| > \| T \|_{\mathcal{L}(E)}$, alors $\| \frac{1}{\lambda}T \|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. D'après 2.(1), $(\lambda 1 - T) = \lambda(1 - \frac{1}{\lambda}T)$ est bijective. Donc $\lambda \in$Res(T) et $(\lambda 1 - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^k}T^k$. Par suite, $\| R_\lambda(T) \|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|^k} \| T \|_{\mathcal{L}(E)}^k = \frac{1}{|\lambda| - \| T \|_{\mathcal{L}(E)}}$ alors $\lim_{|\lambda|\to\infty} \| R_\lambda(T) \|_{\mathcal{L}(E)} = 0$.

2.(3) On sait que le groupe linéaire, noté $G\mathcal{L}(E)$, est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. On a par définition, Res(T) est l'image réciproque de l'ouvert $G\mathcal{L}(E)$ par l'application $\lambda \mapsto \lambda 1 - T$ qui est clairement continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{L}(E)$. Donc, Res(T) est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soient $x \in E$ et $\ell \in E'$. Soit $\lambda_0 \in$Res(T), pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda 1 - T = (\lambda_0 1 - T) + (\lambda - \lambda_0)1$. Il suit que $\lambda 1 - T = (\lambda_0 1 - T)(1 - (\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}(T))$ et si $|\lambda_0 - \lambda| < \| R_{\lambda_0}(T) \|_{\mathcal{L}(E)}^{-1}$ l'opérateur $1 - (\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}(T)$ est bijectif d'après ce qui précède en outre $(1 - (\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}(T))^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}(T)^k$. Donc, $R_\lambda(T) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}(T)^{k+1}$ si $|\lambda_0 - \lambda| < \| R_{\lambda_0}(T) \|_{\mathcal{L}(E)}^{-1}$. La série étant normalement convergente, on peut alors écrire $\Phi(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda_0 - \lambda)^k \ell(R_{\lambda_0}(T)^{k+1}x)$. Donc, l'application ϕ est développable en série entière au voisinage de λ_0. Remarquer que ceci fournit une autre démonstation de Res(T) est un ouvert de $\mathbb{C}$.

2.(4) Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, Res(T) est un ouvert de $\mathbb{C}$ alors $\sigma(T)$ est un fermé de $\mathbb{C}$. D'après 2.(2), $\sigma(T)$ est contenu dans le disque de centre 0 et de rayon $\| T \|_{\mathcal{L}(E)}$. Donc, $\sigma(T)$ est un compact. Si $\sigma(T) = \emptyset$ alors Res$(T) = \mathbb{C}$. Par hypothèse, il existe $\ell \in E'$ non nulle et soit $x \in E$ non nul . D'après 2.(3), l'application, à valeurs complexes, Φ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et elle bornée car tend vers zéro quand $|\lambda| \to \infty$ alors elle est constante, d'après le théorème de Liouville. Comme la forme linéaire ℓ et x sont non nuls, l'application $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ est alors constante. Il en est de même que son inverse $\lambda \mapsto \lambda 1 - T$, ce qui est absurde.

2.(5) Soit $M \neq E$ un sous-espace fermé, il existe $x \in E$ tel que $x \notin M$. Puisque M est fermé, le nombre $t = d(x, M)$ est strictement positif. Il existe $y \in M$ tel que $\| x - y \| \leqslant 2t$. Soit $u = \frac{x-y}{\|x-y\|}$, alors $\| u \| = 1$. Pour tout $z \in M$, $u - z = \frac{1}{\|x-y\|}(x - y - \| x - y \| z)$ et $m + \| x - y \| z \in M$ alors $d(u, M) \geqslant \frac{1}{2}$. Soit $x_0 \in E$ tel que $\| x_0 \| = 1$. Soit $M_0 =$Vect$\{x_0\}$, D'après ce qui précède, il existe $x_1 \in E$ tel que $\| x_1 \| = 1$ et $\| x_1 - x_0 \| \geqslant d(x_1, M_0) \geqslant \frac{1}{2}$. Supposons $x_0, \cdots, x_n$ construis, soit $M_n =$Vect$\{x_0, \cdots, x_n\}$. Puisque E est de dimension infinie, $M_n \neq E$. Alors il existe $x_{n+1} \in E$ tel que $\| x_{n+1} \| = 1$ et $d(x_{n+1}, M_n) \geqslant \frac{1}{2}$. Alors, pour $n > m$, $\| x_n - x_m \| \geqslant d(x_n, M_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$. D'où le résultat.

2.(6) Si T est bijective, le théorème de Banach permet de dire que T est en fait un hoémorphisme de E sur lui même et alors l'image $T(B(0,1))$ de la boule unité $B(0,1)$ serait un voisinage de 0. Comme $T(B(0,1))$ est en plus relativement compact, d'après le théorème de Riesz, E est de dimension finie ce qui contraire à l'hypothèse. Donc, $0 \in \sigma(T)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ une valeur propre de T. Pour $x \in B(0,1) \cap$Ker$(\lambda 1 - T)$, $T(x) = \lambda x \in |\lambda| B(0,1)$, alors la boule unité de l'espace Ker$(\lambda 1 - T)$ est relativement compact car Ker$(\lambda 1 - T)$ est fermé et T est compact. D'après le théorème de Riesz Ker$(\lambda 1 - T)$ est de dimension finie.

2.(7) Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $\lambda 1 - T$ est injectif.

i) On suppose le contraire, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E tell que $\| x_n \| = 1$ et $\| (\lambda 1 - T) x_n \| < \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais la suite $(x_n)_n$ est bornée et T est compact, on peut en extraire une sous suite que l'on note encore $(x_n)_n$ telle que la suite $(T(x_n))_n$ converge vers un $y \in E$. Par suite, $y \in$ Ker$(\lambda 1 - T)$ et $\| y \| = \lambda \neq 0$ ce qui contrdit l'hypothèse $\lambda 1 - T$ injectif. Soit $\mathcal{F}$ un fermé de E, Soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathcal{F}$ telle que la suite $((\lambda 1 - T)x_n)_n$ converge vers un $y \in E$. D'après ce qui précède, $\| (\lambda 1 - T)x_n - (\lambda 1 - T)x_m \| \geqslant \alpha \| x_n - x_m \|$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{F}$ qui est fermé, elle converge alors vers un $x \in \mathcal{F}$. On en déduit que $(\lambda 1 - T)x = y \in (\lambda 1 - T)(\mathcal{F})$. Donc $(\lambda 1 - T)(\mathcal{F})$ est fermé.

ii) D'après le résultat précédent, $(\text{Im}((\lambda 1 - T)^n)))_n$ est une suite décroissante de sous espaces fermés dans E. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors Im$((\lambda 1 - T)^{n+1})) \subset$ Im$((\lambda 1 - T)^n)$ en outre l'inclusion est stricte car sinon pour tout $y \in E$, il existe $x \in E$ tel que $(\lambda 1 - T)^n y = (\lambda 1 - T)^{n+1} x$. Mais $(\lambda 1 - T)^n$ est injectif alors $y = (\lambda 1 - T)x$. Donc, Im$(\lambda 1 - T) = E$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

iii) $(\text{Im}((\lambda 1 - T)^n)))_n$ est une suite strictement décroissante de sous espaces fermés dans E. Soit $n \in \mathbb{N}$, en appliquant 2.(5) à $E =$ Im$((\lambda 1 - T)^n)$ et $M =$Im$((\lambda 1 - T)^{n+1})$ le résulat en découle.

iv) Si $(\lambda 1 - T)$ n'est pas surjectif alors, d'après ce qui précède , il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $\| x_n \| = 1$, $x_n \in$ Im$((\lambda 1 - T)^n)$ et $d(x_n,$Im$((\lambda 1 - T)^{n+1})) \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tous $m > n$, $\| x_n - x_m \| \geqslant d(x_n,Im((\lambda 1 - T)^{n+1})) \geqslant \frac{1}{2}$. On pose pour $n \geqslant 1$, $x_n = (\lambda 1 - T)y_n$ alors $1 = \| (\lambda 1 - T)y_n \| \geqslant \alpha \| y_n \|$. On en déduit que la suite $(y_n)_{n \geqslant 1}$ est bornée. Par compacité de l'oprateur T, on peut en extraire une sous suite $(y_{n_k})_k$, telle que la suite $(T(y_{n_k}))_k$ converge vers $x \in E$. Donc, la suite $(x_n)_n$ admet l'élément $(\lambda 1 - T)x$ comme valeur d'adhérence ce qui est absurde avec l'inégalité $\| x_n - x_m \| \geqslant \frac{1}{2}$ pour $m > n$. Donc, $(\lambda 1 - T)$ est surjectif. Finalement, on a vu que $0 \in \sigma(T)$ et si $\lambda \in \sigma(A)$ avec $\lambda \neq 0$ alors, par définition, $(\lambda 1 - T)$ n'est pas bijectif. D'après ce qui précéde $(\lambda 1 - T)$ n'est pas injectif. Donc λ est une valeur propre de T.

3. Exemple et contre-exemple sur un espace de fonctions

3.(1)

i) Il est clair que $\mathcal{I}$ est linéaire continue, $\| \mathcal{I} \| \leqslant 1$ et $\mathcal{I}[f] \geqslant 0$ pour $f \geqslant 0$. Il reste à montrer qu'elle est compacte, il s'agit de montrer que l'ensemble $\mathcal{F} = \{\mathcal{I}[f] / \| f \|_\infty \leqslant 1\}$ est relativement compact. D'une part, la partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}^0([0,1])$ est uniformément bornée. D'autre part, pour $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ tels que $\| f \|_\infty \leqslant 1$ et $\| g \|_\infty \leqslant 1$, $\| \mathcal{I}[f] - \mathcal{I}[g] \|_\infty = \| \mathcal{I}[f - g] \|_\infty \leqslant \| f - g \|_\infty$, on en déduit que $\mathcal{F}$ est équicontinue. On conclut ensuite par le théorème d'Ascoli

ii) Supposons que $\mathcal{I}$ admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors il existe $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ non nulle telle que $\mathcal{I}[f] = \lambda f$. Pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \lambda f(x)$. Par suite, f est de classe C^∞ sur $[0,1]$ et $f = \lambda f'$. Comme f est

non nulle, $\lambda \neq 0$ et $f(x) = c\exp(\frac{x}{\lambda})$ où c est une constante complexe. Mais $f(0) = 0$ alors $c = 0$ et f est la fonction nulle ce qui absurde.

3.(2) Pour $f \in \mathcal{C}^0_\#$ et $x \in \mathbb{R}$, la série définissant $\mathcal{T}[f](x)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ car $\left|\frac{e^{2i\pi nx}}{a^2+4\pi^2n^2}\hat{f}(n)\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{a^2+4\pi^2n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\mathcal{T}[f]$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T}[f](x+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{2i\pi n(x+1)}}{a^2+4\pi^2n^2}\hat{f}(n) = \mathcal{T}[f](x)$ car $e^{2i\pi n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Donc, $\mathcal{T}[f] \in \mathcal{C}^0_\#$ et $\|\mathcal{T}[f]\|_\infty \leqslant \alpha \|f\|_\infty$ où $\alpha = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+4\pi^2n^2}$. En d'autres termes $f \mapsto \mathcal{T}[f]$ est un opérateur de $\mathcal{L}(\mathcal{C}^0_\#)$ (La linéarité de $\mathcal{T}$ est immédiate).

3.(3) Soit $f \in \mathcal{C}^0_\#$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T}[f](x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{2i\pi n(x+1)}}{a^2+4\pi^2n^2}\hat{f}(n)$. La série étant normalement convergente alors, $\mathcal{T}[f](x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(y) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{2i\pi n(x-y)}}{a^2+4\pi^2n^2} dy$. Par ailleurs, les coefficients de Fourier de la fonction k sont données par $\hat{k}(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi nx}k(x)dx$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\hat{k}(n) &= \tfrac{1}{2a}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} e^{(-2i\pi n+a)x}dx + \frac{1}{2a}\int_{0}^{\frac{1}{2}} e^{(-2i\pi n-a)x}dx + \frac{J}{4a}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{(-2i\pi n+a)x}dx + \frac{J}{4a}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{(-2i\pi n-a)x}dx \\
&= \frac{1-e^{i\pi n-a/2}}{2a(-2i\pi n+a)} + \frac{e^{-i\pi n-a/2}-1}{2a(-2i\pi n-a)} + \frac{J\left(e^{-i\pi n+a/2}-e^{i\pi n-a/2}\right)}{4a(-2i\pi n+a)} + \frac{J\left(e^{-i\pi n-a/2}-e^{i\pi n+a/2}\right)}{4a(-2i\pi n-a)} \\
&= \frac{1-(-1)^n e^{-a/2}}{2a(-2i\pi n+a)} + \frac{(-1)^n e^{-a/2}-1}{2a(-2i\pi n-a)} + \frac{(-1)^n J\left(e^{a/2}-e^{-a/2}\right)}{4a(-2i\pi n+a)} + \frac{(-1)^n J\left(e^{-a/2}-e^{a/2}\right)}{4a(-2i\pi n-a)} \\
&= \frac{1-(-1)^n e^{-a/2}+(-1)^n J\sinh(a/2)}{2a(-2i\pi n+a)} + \frac{1-(-1)^n e^{-a/2}+(-1)^n J\sinh(a/2)}{2a(2i\pi n+a)} \\
&= \frac{1-(-1)^n e^{-a/2}+(-1)^n J\sinh(a/2)}{a^2+4\pi^2n^2} \\
&= \frac{1}{a^2+4\pi^2n^2} \quad \text{ssi } J = \frac{e^{-a/2}}{\sinh(a/2)} = \frac{2}{e^a-1} > 0 \quad \text{car } a > 0.
\end{aligned}$$

Ainsi d'après un théorème de Dirichlet, $k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{2i\pi nx}}{a^2+4\pi^2n^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Donc, $\mathcal{T}[f](x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x-y)f(y)dy$.

3.(4) Soit $f \in \mathcal{C}^0_\#$ telle que $f \geqslant 0$ sur $[0,1]$ et $f \neq 0$. Alors, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathcal{T}[f](x) \geqslant 0$ car par définition, $k > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $f \geqslant 0$ sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ par 1-périodicité. Supposons que $\mathcal{T}[f](x) = 0$ pour un certain $x \in [0,1]$, la continuité de l'application positive, $y \mapsto k(x-y)f(y)$ sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ donne $k(x-y)f(y) = 0$, $\forall y \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Par suite, f est nulle sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ et par 1-périodicité, f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ ce qui contraire à l'hypothèse. Donc, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathcal{T}[f](x) > 0$.

3.(5) Il s'agit de montrer que l'ensemble $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}[f]/\ \|f\|_\infty \leqslant 1\}$ est relativement compact. On déduit de 3.(3) et le fait que $k \in \mathcal{C}^0_\#$ que $|\mathcal{T}[f](x)| \leqslant \|k\|_\infty$ si $\|f\|_\infty \leqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors, $\mathcal{F}$ est uniformément borné. D'autre part, si $x, y \in \mathbb{R}$ et $\|f\|_\infty \leqslant 1$, $|\mathcal{T}[f](x) - \mathcal{T}[f](y)| = \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (k(x-t)-k(y-t))f(t)dt\right| \leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |k(x-t)-k(y-t)|\,dt$. Mais, l'application k est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $|x-y| < \eta$ alors $|k(x)-k(y)| < \varepsilon$. Par suite, $|k(x-t)-k(y-t)| < \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, $|\mathcal{T}[f](x) - \mathcal{T}[f](y)| < \varepsilon$ si $|x-y| < \eta$ et $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Donc $\mathcal{F}$ est équicontinu. D'où le résultat d'après le théorème d'Ascoli. Ainsi $\mathcal{T}$ est un opérateur compact de $\mathcal{L}(\mathcal{C}^0_\#)$.

3.(6) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}^0_\# \setminus \{0\}$ vérifiant $\mathcal{T}[f](x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi nx}\hat{f}(n)(\hat{k}(n)-\lambda) = 0$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n)(\hat{k}(n)-\lambda) = 0$ et comme f n'est la fonction nulle, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\hat{f}(n) \neq 0$, par suite $\hat{k}(n) = \lambda$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $\hat{k}(n) = \frac{1}{a^2+4\pi^2n^2} < \frac{1}{a^2} = \hat{k}(0)$. Donc, pour tout λ valeur propre de $\mathcal{T}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \hat{k}(0)$. Il reste à montrer que $\hat{k}(0)$ est une valeur propre de $\mathcal{T}$. Il s'agit de chercher une fonction $v \in \mathcal{C}^0_\# \setminus \{0\}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{v}(n)(\hat{k}(n)-\hat{k}(0)) = 0$ alors $\hat{v}(n) = 0$ pour

$n \in \mathbb{Z}^*$. Donc, v est une constante non nulle. On prendra $v(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $v \in \mathcal{C}^0_\# \setminus \{0\}$ vérifiant $\mathcal{T}[v] = \hat{k}(0)v$. Donc, $\hat{k}(0)$ est l'unique valeur propre maximale de $\mathcal{T}$ et l'espace propre associé est l'espace des fonctions constantes. On a $\| \mathcal{T} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}^0_\#)} = \hat{k}(0)$. En effet, $\| v \|_\infty = 1$, alors $\| \mathcal{T} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}^0_\#)} \geqslant \hat{k}(0)$. L'autre inégalité s'obtient en utilisant l'inégalité de Hölder, en écrivant $\mathcal{T}[f] = \widetilde{f} * \widetilde{k}$ où $\widetilde{f}$ respectivement $\widetilde{k}$ coïncide avec f respectivement avec k sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et elles sont nulles ailleurs. $\| \mathcal{T}[f] \|_\infty \leqslant \| \widetilde{f} \|_\infty * \| \widetilde{k} \|_1 = \hat{k}(0) \| f \|_\infty$.

3.(7) La forme linéaire φ de $\mathcal{C}^0_\#$ définie par: $\varphi(g) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)dt$ est continue car $|\varphi(g)| \leqslant \| g \|_\infty$. Donc, $\text{Ker}(\varphi) = V$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^0_\#$. Soit $g \in V$, $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{T}[g](x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x-y)g(y)dydx$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x-y)dx = \int_{-\frac{1}{2}-y}^{\frac{1}{2}-y} k(t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(t)dt$ par 1-périodicité. Alors, $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{T}[g](x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(y)dy . \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(t)dt = 0$. Donc, $\mathcal{T}[V] \subset V$.

3.(8) Soit $f \in \mathcal{C}^0_\#$ telle que $\hat{f}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)dt \neq 0$. D'après le résultat de 3.(7) , on peut écrire $f = g + \hat{f}(0)v$ avec $g \in V$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}^n[f] = \mathcal{T}^n[g] + \frac{1}{a^{2n}}\hat{f}(0)v$ d'après 3.(6). Soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T}^n[f](x) = \mathcal{T}^n[g](x) + \frac{1}{a^{2n}}\hat{f}(0)$. D'où le résultaat.

4. Un théorème de point fixe

4.(1) Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B(0,1) \subset \ell^2(\mathbb{N})$, $\| f(x) \|_2^2 = (1 - \| x \|_2^2) + \| x \|_2^2 = 1$ alors f est à valeurs dans la sphère unité de $\ell^2(\mathbb{N})$. Si $f(x) = x$ alors $\| x \|_2^2 = 1$ et $x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui est absurde. Donc, f n'admet pas de point fixe. Il reste à montrer la continuité de f, pour cela on peut écrire f comme la somme des deux applications continues $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\sqrt{1 - \| x \|_2^2}, 0, 0, 0, \cdots)$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (0, x_0, x_1, x_2, \cdots)$. D'où le résultat.

4.(2)

i) Soit $y \in \overline{f(B)}$, $y \in \overset{o}{B}(y_i, \frac{1}{n})$ pour un certain $1 \leqslant i \leqslant N_n$. Soit $z \in \overline{f(B)}$ tel que $\| y - z \| < \frac{1}{n} - \| y - y_i \|$, alors $\| z - y_i \| \leqslant \| y - z \| + \| y - y_i \| < \frac{1}{n}$. Par suite, $z \in \overset{o}{B}(y_i, \frac{1}{n})$ et $\Psi(y) - \Psi(z) = \| z - y_i \| - \| y - y_i \|$, puis $|\Psi(y) - \Psi(z)| \leqslant \| y - z \|$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, soit $0 < \eta \leqslant \min(\frac{1}{n} - \| y - y_i \|, \varepsilon)$ si $z \in \overline{f(B)}$ vérifiant $\| y - z \| < \eta$ alors $|\Psi(y) - \Psi(z)| < \varepsilon$. D'où la continuité de Ψ. Par hypothèse f est compacte, alors $\overline{f(B)}$ est compact par conséquent la fonction Ψ atteint sa borne inférieure. Soit $\delta = \min \Psi(\overline{f(B)})$ alors $\delta > 0$ car par définition, $\Psi(y) > 0$ pour tout $y \in \overline{f(B)}$. D'où le résultat.

ii) Soit $x \in B$, $\Psi(f(x))(f(x) - f_n(x)) = \sum_{j=1}^{N_n} \psi_j(f(x)) [f(x) - y_j] = \sum_{j\in I} \psi_j(f(x)) [f(x) - y_j]$ où $I = \{j \in \{1, \cdots, n\} / \ \| f(x) - y_j \| < \frac{1}{n}\}$ car pour $j \notin I$, $\psi_j(f(x)) = 0$. Donc, $\Psi(f(x)) \ \| f(x) - f_n(x) \| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j\in I} \psi_j(f(x)) \leqslant \frac{1}{n}\Psi(f(x))$ puis $\| f(x) - f_n(x) \| \leqslant \frac{1}{n}$.

4.(3)

i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, avec la notation de 4.(2), on considère le sous-espace F de E engendré par $\{y_1, \cdots, y_{N_n}\}$ et C l'enveloppe convexe fermée de $\{y_1, \cdots, y_{N_n}\}$ (on suppose qu'au moins l'un des y_j est non nul car sinon l'application f serait la constante nulle et par conséquent 0 est un point fixe de f). Alors, C est une partie convexe fermée de l'espace normé de dimension finie F. D'une part, par définition, pour tout $x \in B$, $f_n(x) \in C$. D'autre part, pour tout j, $y_j \in \overline{f(B)} \subset B$ alors $C \subset B$ car B est un convexe fermé et puisqu'il est en plus borné, C est alors borné. D'après ce qui précède, $f_n : C \to C$ est continue. D'après le théorème de Brouwer, il existe $x_n \in C$ tel que $f_n(x_n) = x_n$.

ii) D'après 4.(3).ii), il existe une suite $(x_n)_{n>0}$ de B telle que $f_n(x_n) = x_n$ pour tout $n > 0$. l'application f est compacte de B dan B, par hypothèse et la suite $(x_n)_{n>0}$ est bornée car B l'est, il existe une sous suite $(x_{n_k})_k$ telle que la suite $(f(x_{n_k}))_k$ converge vers un $y \in B$ car B est fermé. D'après 4.(2).ii), pour tout k, $\| f(x_{n_k}) - x_{n_k} \| = \| f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) \| \leqslant \frac{1}{n_k}$. Alors, $\| y - x_{n_k} \| \leqslant \frac{1}{n_k} + \| f(x_{n_k}) - y \|$, la suite $(x_{n_k})_k$ converge alors vers y. Par continuité de f, $f(y) = y$. D'où l'existence d'un point fixe de f dans B.

5. Application en théorie spectrale

5.(1) Soit $\mathcal{C}$ l'ensembles des fonctions f continues et positives sur $[a,b]$. Alors, $0 \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est fermé. En effet, soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{C}$ qui converge vers une fonction f, f est alors continue car la convergence est uniforme et f est positive en utilisant seulement la convergence est simple. Soit f, g dans $\mathcal{C}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, pour tout $x \in [a,b]$, $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \geqslant 0$ alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{C}$. Si $f \in \mathcal{C}$ et $-f \in \mathcal{C}$, alors pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ et $-f(x) \geqslant 0$, alors $f = 0$. Conclusion, $\mathcal{C}$ est un cône. Soit $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Soit $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\} > 0$, si $\| f - g \| < m$, alors pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x) - g(x)| < m$. Par suite, pour tout $x \in [a,b]$, $g(x) > f(x) - m \geqslant 0$. Donc, l'ensemble $U = \{f \in C^0([a,b], \mathbb{R}) : f > 0\}$ est un ouvert contenu dans $\mathcal{C}$ donc $U \subset \overset{o}{\mathcal{C}}$. On a $\mathcal{C} \subset \overline{U}$. En effet, soit $f \in \mathcal{C}$. Si $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\} > 0$, $f \in U$. Si $m = 0$, la suite de terme général $f_n = f + \frac{1}{n!}$ est dans U et elle converge vers f alors $f \in \overline{U}$. Comme $\mathcal{C}$ est fermé et $U \subset \mathcal{C}$ alors $\mathcal{C} = \overline{U}$. Donc, $\overset{o}{\mathcal{C}} = U$.

Existence d'un vecteur propre dans $\overset{o}{\mathcal{C}}$. Soit $x \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$.

5.(2) Par hypothèse, le cône $\mathcal{C}$ est d'intérieur non vide et l'opérateur T est fortement positif, alors $T(x) \in \overset{o}{\mathcal{C}}$. Il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $\overset{o}{\mathcal{B}}(Tx, r) \subset \mathcal{C}$. En particulier, $Tx - \frac{r}{2\|x\|}x \in \mathcal{C}$. Soit $w = \frac{2\|x\|}{r} > 0$ alors $wTx - x \in \mathcal{C}$ d'où le résultat.

5.(3) Soit $\varepsilon > 0$, on suppose $y = MT(y + \varepsilon x)$ avec $M \geqslant 0$ et $y \in \mathcal{C}$, $y - \varepsilon M x = MT(y + \varepsilon x) - \varepsilon M x = MTy + \varepsilon M(Tx - x) \in \mathcal{C}$ alors le résultat en question est vrai pour $n = 1$. Supposons qu'il est vrai pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} y - \varepsilon M^{n+1}x &= MTy + \varepsilon MTx - \varepsilon M^{n+1}x \\ &= MTy + \varepsilon MTx - \varepsilon M^{n+1}Tx + \varepsilon M^{n+1}(Tx - x) \\ &= MT(y + \varepsilon x - \varepsilon M^n x) + \varepsilon M^{n+1}(Tx - x) \\ &= \varepsilon MTx + MT(y - \varepsilon M^n x) + \varepsilon M^{n+1}(Tx - x) \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence et le fait que T est positif sur le cône $\mathcal{C}$ permettent de conclure. Si $M > 1$, alors la suite de terme général $\dfrac{1}{M^n}y - \varepsilon x$ est dans $\mathcal{C}$ et elle converge vers $-\varepsilon x$ alors $-x \in \mathcal{C}$ car $\mathcal{C}$ est fermé, par suite $x = 0$ car $x \in \mathcal{C}$, ce qui est absurde. Donc $M \leqslant 1$.

5.(4) Soit $\varepsilon > 0$ et $R > 0$.

i) L'ensemble $\mathcal{C}_\varepsilon$ est fermé et borné car inclus dans la boule fermée de centre 0 et de rayon R , $\mathcal{C}$ est fermé et l'application $f_\varepsilon : y \mapsto y - \varepsilon x$ est continue de E dans E, $\mathcal{C}_\varepsilon = B(0,R) \cap f_\varepsilon^{-1}(\mathcal{C})$. Comme x est non nul, $0 \notin \mathcal{C}_\varepsilon$. Soit $y, z \in \mathcal{C}_\varepsilon$ et $\alpha \in [0,1]$, $\alpha y + (1-\alpha)z - \varepsilon x = \alpha(y - \varepsilon x) + (1-\alpha)(z - \varepsilon x) \in \mathcal{C}$ et $\|\alpha y + (1-\alpha)z\| \leqslant R$ alors $\mathcal{C}_\varepsilon$ est convexe.

ii) Pour $R \geqslant \varepsilon \|x\|$, $\varepsilon x \in \mathcal{C}_\varepsilon$. Soit $y \in \mathcal{C}_\varepsilon$, $\|T_\varepsilon(y)\| \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(E)} \dfrac{\|y + \varepsilon \|y\| x\|}{\|y\|} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(E)} (1 + \varepsilon \|x\|) \leqslant R$ pour R assez grand. Par ailleurs, $\|y\| T_\varepsilon(y) - \varepsilon \|y\| x = T(y + \varepsilon \|y\| x) - \varepsilon \|y\| x = Ty + \varepsilon \|y\| (Tx - x) \in \mathcal{C}$. Par suite, $T_\varepsilon(y) - \varepsilon x \in \mathcal{C}$. Donc, $\mathcal{C}_\varepsilon$ est stable par T_ε. Par définition, T_ε est continue sur $\mathcal{C}_\varepsilon$ car T est continu et la norme est continue et > 0 sur $\mathcal{C}_\varepsilon$. Soit $(y_n)_n$ une suite de $\mathcal{C}_\varepsilon$, T est compact alors on peut extraire une sous-suite $(y_{n_k})_k$ telle que $(T(\dfrac{1}{\|y_{n_k}\|}y_{n_k}))_k$ converge vers un $y \in E$. Par conséquent, $T_\varepsilon(y_{n_k}) = \dfrac{1}{\|y_{n_k}\|}T(y_{n_k}) + \varepsilon Tx$ converge vers $y + \varepsilon Tx$ dans $\mathcal{C}_\varepsilon$ car stable et fermé. Donc, T_ε est compacte.

iii) D'après le théorème 2, il existe $y_\varepsilon \in \mathcal{C}_\varepsilon$ telle que $y_\varepsilon = T_\varepsilon(y_\varepsilon)$. Alors, $y_\varepsilon = T_\varepsilon(y_\varepsilon) = T(\dfrac{1}{\|y_\varepsilon\|}y_\varepsilon + \varepsilon x)$. Ceci devient avec les notations de l'énoncé, $z_\varepsilon = M_\varepsilon T(z_\varepsilon + \varepsilon x)$ et $z_\varepsilon \in \mathcal{C}$. D'après 5.(3), $0 < M_\varepsilon \leqslant 1$.

iv) Pour tout $n > 0$, on pose $z_n = z_{1/n}$ et $y_n = y_{1/n}$ en appliquant 5.(4).iii) pour $\varepsilon = 1/n$. La suite $(z_n)_n$ est bornée, $\| z_n \| = 1$ pour $n > 0$, alors on peut en extraire une sous suite $(z_{n_k})_k$ telle que la suite $(T(z_{n_k}))_k$ converge vers un $u \in \mathcal{C}$ par compacité de T et fermeture de $\mathcal{C}$. Mais, $y_{n_k} = T(z_{n_k}) + \dfrac{1}{n_k}T(x)$ alors la suite $(y_{n_k})_k$ converge vers u . Par conséquent, la suite $(\| y_{n_k} \|)_k$ converge vers $\| u \|$. De l'inégalité $\| y_{n_k} \| = M_{1/n_k}^{-1} \geqslant 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on déduit que u est non nul, on pose alors $\lambda = \dfrac{1}{\|u\|}$. Puis de l'égalité $\| y_{n_k} \| z_{n_k} = y_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on déduit que la suite $(z_{n_k})_k$ converge vers $z = \lambda u$. Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\| y_{n_k} \| T(z_{n_k}) = T(y_{n_k})$ donne $z = \lambda T(z)$. Enfin, puisque $\lambda \in]0,1]$, $z \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ et T est fortement positif alors $z = T(\lambda z) \in \overset{o}{\mathcal{C}}$.

Unicité.

5.(5) On suppose qu'il existe $z' \in \overset{o}{\mathcal{C}}$ et $\mu > 0$ tels que $z' = \mu T z'$. Soit $\mathcal{A} = \{s \geqslant 0 : z - sz' \in \mathcal{C}\}$.

i) On a $0 \in \mathcal{A}$ car $z \in \mathcal{C}$. Par ailleurs, $z \in \overset{o}{\mathcal{C}}$, il existe $r > 0$ tel que si $\| z - y \| \leqslant r$, $y \in \mathcal{C}$. En particulier, $y = z - \dfrac{r}{\| z' \|} z' \in \mathcal{C}$. Par suite, $\mathcal{A}$ est non réduit à $\{0\}$. Soit $s \in \mathcal{A}$, alors pour tout $0 \leqslant t \leqslant s$, on peut écrire $z - tz' = z - st + (s-t)z' \in \mathcal{C}$. On en déduit que $\mathcal{A}$ est intervalle. L'application $s \mapsto z - sz'$ de $\mathbb{R}^+$ dans E est continue et $\mathcal{C}$ est fermé alors $\mathcal{A}$ est fermé. Il reste à montrer que $\mathcal{A}$ est borné. Supposons que $z - nz' \in \mathcal{C}$ pour tout entier $n > 0$ par suite $\dfrac{1}{n} z - z' \in \mathcal{C}$ et puisque $\mathcal{C}$ est fermé, quand n tend vers $+\infty$, on aura $-z' \in \mathcal{C}$ et alors $z' = 0$ car $z' \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est un cône. Mais, 0 n'est pas intérieur à $\mathcal{C}$ car sinon, il existe $r > 0$ tel que si $\| y \| \leqslant r$, $y \in \mathcal{C}$. En particulier, $y = -rz \in \mathcal{C}$ alors $-z \in \mathcal{C}$ et comme $z \in \mathcal{C}$, $z = 0$ ce qui est absurde avec $\| z \| = 1$. Donc, il existe un entier $N > 0$ telque $z - Nz' \notin \mathcal{C}$. En d'autres termes, $N \notin \mathcal{A}$ et puisque $\mathcal{A}$ est intervalle alors $\mathcal{A} \subset [0, N[$. Donc, $\mathcal{A}$ est borné.

ii) Soit $\alpha = \max \mathcal{A}$, alors $\alpha > 0$ et $\mathcal{A} = [0, \alpha]$. On a $\mu z - \lambda\alpha z' = \mu\lambda T(z - \alpha z')$, $z - \alpha z' \in \mathcal{C}$ et T positif alors $\mu z - \lambda\alpha z' \in \mathcal{C}$. On déduit que $z - \dfrac{\lambda\alpha}{\mu} z' \in \mathcal{C}$ et puis $\dfrac{\lambda\alpha}{\mu} \in \mathcal{A}$. Ensuite, $\dfrac{\lambda\alpha}{\mu} \leqslant \alpha$. Donc, $\lambda \leqslant \mu$. Par symétrie de rôles, on a en fait $\lambda = \mu$.

5.(6) Soit $\nu \in \mathbb{R}$ et $z' \in E$ tels que $z' \notin \mathcal{C} \cup (-\mathcal{C})$ et $z' = \nu T z'$. On considère les ensembles

$$\mathcal{B}_+ = \{s \geqslant 0 : z + sz' \in \mathcal{C}\} \text{ et } \mathcal{B}_- = \{s \geqslant 0 : z - sz' \in \mathcal{C}\}$$

En répétant le même raisonnement de 5.(5).i), on montre que ces ensembles sont des intervalles férmés non réduits à $\{0\}$ et ils contiennent 0. La même démontration aussi pour montrer qu'ils sont bornés en utilisant l'hypothèse $z' \notin \mathcal{C} \cup (-\mathcal{C})$. Soit $\beta_+ = \max \mathcal{B}_+$ et $\beta_- = \max \mathcal{B}_-$, on a alors $\beta_+, \beta_- > 0$ et $\mathcal{B}_+ = [0, \beta_+]$, $\mathcal{B}_- = [0, \beta_-]$. Puisque $z' \neq 0$, $\nu \neq 0$. Si $\nu > 0$, $\nu z + \beta_+\lambda z' = \nu\lambda T(z + \beta_+ z')$. Comme $z + \beta_+ z' \in \mathcal{C}$ et T positif, alors $\nu z + \beta_+\lambda z' \in \mathcal{C}$ puis $z + \dfrac{\beta_+\lambda}{\nu} z' \in \mathcal{C}$. Donc , $\dfrac{\beta_+\lambda}{\nu} \leqslant \beta_+$. Il suit, $\lambda \leqslant \nu$. Si $\nu < 0$, soit $\beta = \min(\beta_+, \beta_-)$, $\beta > 0$ et on a $-\nu z - \beta\lambda z' = -\nu\lambda T(z + \beta z')$, alors $\dfrac{\beta\lambda}{-\nu} \leqslant \beta_+$. En considérant, $-\nu z + \beta\lambda z' = -\nu\lambda T(z - \beta z')$, alors $\dfrac{\beta\lambda}{-\nu} \leqslant \beta_-$. On en déduit que $\dfrac{\beta\lambda}{-\nu} \leqslant \beta$. Donc, $\lambda \leqslant -\nu$. En combinant les deux résultats $\lambda \leqslant |\nu|$. Supposons que $\lambda = |\nu|$. Si $\nu > 0$ alors $z + nz' = \lambda T z = \lambda T(z - \beta z') + \beta z'$. De l'égalité $z = \lambda T z$ on vérifie que Vect$\{z\} \subset$Ker$(\lambda T - 1)$. Inversement, soit $z' \in E$ telque $z' = \lambda T z'$. D'après ce qui précède, $z' \in \mathcal{C} \cup (-\mathcal{C})$. Puisque l'égalité $z' = \lambda T z'$ est vraie pour $\pm z'$ on peut supposer que $z' \in \mathcal{C}$. Si $z' = 0$, c'est terminé. Si $z' \neq 0$, alors $z' = T(\lambda z') \in \overset{o}{\mathcal{C}}$ car T est fortement positif et $\lambda z' \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$. Par conséquent, z' et z ont les mêmes propriétés. D'après 5.(5).i), il existe $s > 0$ tel que $z' - sz \in \mathcal{C}$ et $z - sz' \in \mathcal{C}$. Donc, $z' = sz$ il suit $z' \in$Vect$\{z\}$. Donc Ker$(\lambda T - 1) =$Vect$\{z\}$.

6. Un exemple sur un espace de suites

6.(1) Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, pour $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x^{(p)} = (x_n^{(p)})_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $x_n^{(p)} = x_n$ si $p \neq n$ et $x_p^{(p)} = -\frac{1}{p}$. $\| x - x^{(p)} \|_2^2 = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| x_n - x_n^{(p)} \right|^2 = \left| x_p + \frac{1}{p} \right|^2$. Donc, $\| x - x^{(p)} \|_2 = \left| x_p + \dfrac{1}{p} \right|$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de $\left(\ell^2(\mathbb{Z}), \| \, . \, \|_2\right)$ à termes réels positifs ou nuls. Il est immédiat que $\mathcal{C}$ est un cône. Pour montrer qu'il est d'intérieur vide c'est équivalent à montrer que son complémentaire est dense dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. D'après ce qui précède, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, la suite $(x^{(p)})_{p\in\mathbb{N}^*}$ de $\ell^2(\mathbb{Z}) \setminus \mathcal{C}$ convege vers x car le terme général de la suite x tend vers 0. D'où le résulat.

6.(2) Soit $\mathbf{h}_\kappa$ l'espace des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $\mathcal{N}(u)^2 = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 + \kappa_n) |u_n|^2 < \infty$. On considère la suite, à termes réels strictement positifs, $s = \left(\sqrt{1 + \kappa_n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, on a alors $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{h}_\kappa$ si et seulement si $su \in \ell^2(\mathbb{Z})$, où su est le produit cartésien de la suite s par la suite u, en outre $\| su \|_2 = \mathcal{N}(u) \geqslant \| u \|_2$. Alors $\mathbf{h}_\kappa$ est un sous espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{Z})$ car si $u, v \in \mathbf{h}_\kappa$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $su + \lambda sv \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $s(u + \lambda v) = su + \lambda sv$ alors $u + \lambda v \in \mathbf{h}_\kappa$. On note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire de $\ell^2(\mathbb{Z})$ ($\mathbb{C}$-linéaire en la seconde variable), alors l'application $(u, v) \mapsto \langle su, sv \rangle$ de $\mathbf{h}_\kappa \times \mathbf{h}_\kappa$ dans $\mathbb{C}$ est un produit scalaire sur $\mathbf{h}_\kappa$ dont $\mathcal{N}$ est la norme associée. Ainsi, $(\mathbf{h}_\kappa, \mathcal{N})$ est un espace préhilbertien complexe. Par ailleurs, l'application $u \mapsto su$ de $(\mathbf{h}_\kappa, \mathcal{N})$ sur $(\ell^2(\mathbb{Z}), \| \, . \, \|_2)$ est une isométrie, Puisque $(\ell^2(\mathbb{Z}), \| \, . \, \|_2)$ est un espace de Hilbert, alors $(\mathbf{h}_\kappa, \mathcal{N})$ est complet. Donc, $(\mathbf{h}_\kappa, \mathcal{N})$ est un espace de Hibert complexe.

6.(3) Pour tout $u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$, la suite $\delta u=(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ en outre $\|\,\delta u\,\|_2\leqslant\sqrt{2}\,\|\,u\,\|_2$. Soit $\mu>0$ et $u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}, v=(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathbf{h}_\kappa$ alors les suites su, sv, δu et δv sont dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, on peut écrire alors

$$a(u,v)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}((\mu+\kappa_n)\overline{u_n}v_n+(\overline{u_{n+1}}-\overline{u_n})(v_{n+1}-v_n))=(\mu-1)\,\langle u,v\rangle+\langle su,sv\rangle+\langle\delta u,\delta v\rangle$$

Donc l'application a est bien définie sur $\mathbf{h}_\kappa\times\mathbf{h}_\kappa$. Pour $u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathbf{h}_\kappa$ on a :

$$\begin{aligned}a(u,u)&=(\mu-1)\,\|\,u\|_2^2+\mathcal{N}(u)^2+\|\,\delta u\,\|_2^2\\&\leqslant(\mu-1)\,\|\,u\|_2^2+\mathcal{N}(u)^2+2\,\|\,u\,\|_2^2\\&\leqslant(\mu+1)\,\|\,u\|_2^2+\mathcal{N}(u)^2\leqslant(\mu+2)\mathcal{N}(u)^2\end{aligned}$$

Par hypothèse, il existe un entier N tel que $\dfrac{\mu+\kappa_n}{1+\kappa_n}>\dfrac{1}{2}$ si $|n|>N$. Soit $\alpha=\min\{\dfrac{1}{2};\dfrac{\mu+\kappa_n}{1+\kappa_n}:|n|\leqslant N\}$. On a:

$$\begin{aligned}a(u,u)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mu+\kappa_n)\,|u_n|^2+\|\,\delta u\,\|_2^2\\&\geqslant\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mu+\kappa_n)\,|u_n|^2\\&=\sum_{|n|\leqslant N}(\mu+\kappa_n)\,|u_n|^2+\sum_{|n|>N}(\mu+\kappa_n)\,|u_n|^2\\&\geqslant\alpha\sum_{|n|\leqslant N}(1+\kappa_n)\,|u_n|^2+\frac{1}{2}\sum_{|n|>N}(1+\kappa_n)\,|u_n|^2\\&\geqslant\alpha\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+\kappa_n)\,|u_n|^2=\alpha\mathcal{N}(u)^2\end{aligned}$$

Les applications $u\mapsto su$ et $u\mapsto\delta u$ sont linéaires de $\mathbf{h}_\kappa$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ alors d'après l'expression de a écrite dans 6.(3) et d'après ce qui précède l'application a est un produit scalaire sur $\mathbf{h}_\kappa$ dont la norme associée est équivalente à $\mathcal{N}$ et de 6.(2), on déduit que $\mathbf{h}_\kappa$ muni de la norme $u\mapsto\sqrt{a(u,u)}$ est un espace de Hilbert.

6.(4) Soit $f=(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$. Supposons que $u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathbf{h}_\kappa$ vérifie

$$\forall\,n\in\mathbb{Z},\quad\mu u_n+\kappa_n u_n-(u_{n+1}-2u_n+u_{n-1})=f_n$$

Soit $v=(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathbf{h}_\kappa$, (toutes les sommes suivantes sont convergentes d'après 6.(3))

$$\begin{aligned}a(u,v)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mu+\kappa_n)\overline{u_n}v_n+(\overline{u_{n+1}}-\overline{u_n})(v_{n+1}-v_n)\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mu+\kappa_n)\overline{u_n}v_n+\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\overline{u_{n+1}}-\overline{u_n})v_{n+1}-\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\overline{u_{n+1}}-\overline{u_n})v_n\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mu+\kappa_n)\overline{u_n}v_n+\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\overline{u_n}-\overline{u_{n-1}})v_n-\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\overline{u_{n+1}}-\overline{u_n})v_n\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left((\mu+\kappa_n)\overline{u_n}-(\overline{u_{n+1}}-2\overline{u_n}+\overline{u_{n-1}})\right)v_n\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{f_n}v_n\end{aligned}$$

Inversement, l'hypothèse implique qu'on a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\overline{f_n}-(\mu+\kappa_n)\overline{u_n}+(\overline{u_{n+1}}-2\overline{u_n}+\overline{u_{n-1}})\right)v_n=0$ pour tout $v=(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathbf{h}_\kappa$. Pour $p\in\mathbb{Z}$ soit $v^{(p)}$ la suite définie pour $n\in\mathbb{Z}$ par : $v_n^{(p)}=0$ si $n\neq p$ et $v_p^{(p)}=1$. On a $v^{(p)}\in\mathbf{h}_\kappa$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$ et alors $\overline{f_p}=(\mu+\kappa_p)\overline{u_p}+(\overline{u_{p+1}}-2\overline{u_p}+\overline{u_{p-1}})$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$. D'où le résultat. La forme linéaire $v=(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}\mapsto\langle f,v\rangle=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{f_n}v_n$ de $\mathbf{h}_\kappa$ est continue. En effet, pour tout $v\in\mathbf{h}_\kappa$, $sv\in\ell^2(\mathbb{Z})$. Puisque, $f\in\ell^2(\mathbb{Z})$ alors $s^{-1}f\in\ell^2(\mathbb{Z})$ car $\|\,s^{-1}f\,\|_2\leqslant\|\,f\,\|_2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, on a

$$|\langle f,v\rangle|=\left|\left\langle s^{-1}f,sv\right\rangle\right|\leqslant\|\,s^{-1}f\,\|_2\|\,sv\,\|_2=\|\,s^{-1}f\,\|_2\,\mathcal{N}(v)$$

Le théorème de représentation de Riesz assure l'existence et l'unicité d'un $u\in\mathbf{h}_\kappa$ tel que $a(u,v)=\langle f,v\rangle$ pour tout $v\in\mathbf{h}_\kappa$. D'après ce sui précède u est la solution de (2).

6.(5) Soit $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $(\mathbf{h}_\kappa,\mathcal{N})$. Il existe $M\geqslant 0$ tel que pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\mathcal{N}(u^{(p)})\leqslant M$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\left|u_n^{(p)}\right|\leqslant M$. En particulier, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, la suite complexe $(u_n^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par suite, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, il existe une application strictement croissante φ_n de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $(u_n^{(\varphi_n(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un complexe noté u_n. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on pose $u^{(p_k)}=(u_n^{(\varphi_n(k))})_{n\in\mathbb{Z}}$ et $u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Alors, $\|u^{(p_k)}-u\|_2^2$ tend vers 0 quand $k\to+\infty$.
Soit $f^{(p)}=(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite bornée dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. Alors, la suite de terme général $u^{(p)}=S(f^{(p)})$ est bornée dans $(\mathbf{h}_\kappa,\mathcal{N})$ car pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$$\alpha\mathcal{N}(u^{(p)})^2\leqslant a(u^{(p)},u^{(p)})=\left\langle f^{(p)},u^{(p)}\right\rangle\leqslant\|f^{(p)}\|_2\|u^{(p)}\|_2\leqslant\|f^{(p)}\|_2\,\mathcal{N}(u^{(p)})\Rightarrow\alpha\mathcal{N}(u^{(p)})\leqslant\|f^{(p)}\|_2$$

D'après ce qui précède, on peut extraire une sous-suite $(u^{(p_k)})k\in\mathbb{N}$ convergente dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. Donc, l'application S est compacte. Il est immédiat que S est un opérateur de $\ell^2(\mathbb{Z})$.
6.(6) Soit $f=(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs réelles alors, d'après la relation (2), pour tout $n\in\mathbb{Z}$

$$\mu\Im m\,(u_n)+\kappa_n\Im m\,(u_n)-(\Im m\,(u_{n+1})-2\Im m\,(u_n)+\Im m\,(u_{n-1}))=0$$

Par unicité, $0=S(0)=(\Im m\,(u_n))_{n\in\mathbb{Z}}$. Donc, $u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs réelles.
Soit $f=(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs réelles positives, on pose pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $v_n=\min(0,u_n)$ où $u=S(f)$. D'après la relation (3), $a(u,v)=\langle f,v\rangle=\sum_{n\in\mathbb{Z}:u_n\leqslant 0}f_nu_n\leqslant 0$. Par définition et le fait que u et v sont à valeurs réelles,

$$a(u,v)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mu+\kappa_n)u_nv_n+(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}-v_n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}:u_n\leqslant 0}(\mu+\kappa_n)u_n^2+\sum_{n\in\mathbb{Z}}(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}-v_n)\geqslant 0$$

Car pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}-v_n)\geqslant 0$. En effet,
Si $u_{n+1}\geqslant u_n\geqslant 0$ ou $u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant 0$, $(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}-v_n)=0$
Si $0\geqslant u_{n+1}\geqslant u_n$ ou $0\geqslant u_n\geqslant u_{n+1}$, $(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}-v_n)=(u_{n+1}-u_n)^2\geqslant 0$
Si $u_{n+1}\geqslant 0\geqslant u_n$, $(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}-v_n)=-(u_{n+1}-u_n)u_n=-u_{n+1}u_n+u_n^2\geqslant 0$
Si $u_n\geqslant 0\geqslant u_{n+1}$, $(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}-v_n)=(u_{n+1}-u_n)u_{n+1}=u_{n+1}^2-u_nu_{n+1}\geqslant 0$
Alors, $a(u,v)=0$. Par suite, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ tel que $u_n\leqslant 0$, $(\mu+\kappa_n)u_n^2=0$. Il suit, $u_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$ tel que $u_n\leqslant 0$. Donc, la suite u est à valeurs positives.
6.(7) Soit $f=(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs réelles positives. On suppose qu'il existe $n_0\in\mathbb{Z}$ tel que $f_{n_0}>0$. D'après 6.(6), la suite $u=S(f)$ est à valeurs positives. Supposons qu'il existe $n_1\in\mathbb{Z}$ tel que $u_{n_1}=0$. D'après la relation (2),

$$f_{n_1}=\mu u_{n_1}+\kappa_nu_{n_1}-(u_{n_1+1}-2u_{n_1}+u_{n_1-1})=-(u_{n_1+1}+u_{n_1-1})\leqslant 0$$

Alors $f_{n_1}=u_{n_1+1}=u_{n_1-1}=0$. Par conséquent, $n_0\neq n_1$.
Si $n_0>n_1$, En appliquant à nouveau la relation (2),

$$f_{n_1+1}=\mu u_{n_1+1}+\kappa_nu_{n_1+1}-(u_{n_1+2}-2u_{n_1+1}+u_{n_1})=-u_{n_1+2}\leqslant 0$$

Alors $f_{n_1+1}=u_{n_1+2}=0$. Ainsi de suite, on aura $f_{n_1+k}=u_{n_1+k}=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. En particulier, on obtiendra $f_{n_0}=0$ ce qui est absurde. De même, si $n_0<n_1$ on applique la relation (2) pour $n=n_1-1$, on obtient

$$f_{n_1-1}=\mu u_{n_1-1}+\kappa_nu_{n_1-1}-(u_{n_1}-2u_{n_1-1}+u_{n_1-2})=-u_{n_1-2}\leqslant 0$$

Alors $f_{n_1-1}=u_{n_1-2}=0$. Ainsi de suite, en descendant jusqu'au n_0, on obtiendra encore $f_{n_0}=0$ ce qui est absurde. Donc la suite u est à valeurs strictement positives.
6.(8) On a d'abord, par définition et par 6.(3), $\alpha=\alpha\,\|u^{(p)}\|_2^2\leqslant\alpha\mathcal{N}(u^{(p)})^2\leqslant a(u^{(p)},u^{(p)})$ alors $m\geqslant\alpha>0$. Puisque la suite $(a(u^{(p)},u^{(p)}))_p$ converge vers m alors elle est bornée, la même inégalité précèdente permet de dire que la suite $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(\mathbf{h}_\kappa,\mathcal{N})$. D'après 6.(5), il existe une sous suite $(u^{(p_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente dans $\left(\ell^2(\mathbb{Z}),\|.\|_2\right)$ vers un $u^{(\infty)}\in\ell^2(\mathbb{Z})$. Par ailleurs, la suite $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ étant dans le sous espace fermé $\mathbf{h}_\kappa$ alors $u^{(\infty)}\in\mathbf{h}_\kappa$. Par continuité, on obtient $a(u^{(\infty)},u^{(\infty)})=m$ et $\|u^{(\infty)}\|_2=1$.
6.(9) Soit $v\in\mathbf{h}_\kappa$ et $t\in\mathbb{R}$ alors $u^{(\infty)}+tv\in\mathbf{h}_\kappa$. Il suit, $a(u^{(\infty)}+tv,u^{(\infty)}+tv)\geqslant m\,\|u^{(\infty)}+tv\|_2^2$. En développant:

$$m+t^2a(v,v)+2t\Re e\left(a(u^{(\infty)},v)\right)\geqslant m\left(1+t^2\,\|v\|_2^2+2t\Re e\left(\left\langle u^{(\infty)},v\right\rangle\right)\right)$$

$$(a(v,v) - m \parallel v \parallel_2^2)t^2 + 2\Re e\left(a(u^{(\infty)},v) - \left\langle mu^{(\infty)}, v\right\rangle\right) t \geqslant 0$$

Comme $a(v,v) \geqslant m \parallel v \parallel_2^2$, ce trinôme est $\geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\Re e\left(a(u^{(\infty)},v) - \left\langle mu^{(\infty)}, v\right\rangle\right) = 0$. En refait le même calcul avec iv à la place de v, on obtient:

$$(a(v,v) - m \parallel v \parallel_2^2)t^2 - 2\Im m\left(a(u^{(\infty)},v) - \left\langle mu^{(\infty)}, v\right\rangle\right) t \geqslant 0$$

On a également la même conclusion à savoir $\Im m\left(a(u^{(\infty)},v) - \left\langle mu^{(\infty)}, v\right\rangle\right) = 0$. Donc, $a(u^{(\infty)},v) = \left\langle mu^{(\infty)}, v\right\rangle$ pour tout $v \in \mathbf{h}_\kappa$. D'après la relation (3), $S(mu^{(\infty)}) = u^{(\infty)}$. D'où $S(u^{(\infty)}) = \frac{1}{m}u^{(\infty)}$.

6.(10). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de S. Il existe une suite $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ non nulle telle que $S(f) = \lambda f$. Si $\lambda = 0$, alors $\lambda < \frac{1}{m}$. Si $\lambda \neq 0$, alors $f = \frac{1}{\lambda}S(f) \in \mathbf{h}_\kappa$. Par ailleurs, $a(S(f),f) = a(\lambda f, f) = \overline{\lambda}a(f,f)$. Mais, $a(S(f),f) = \langle f, f\rangle = \parallel f \parallel_2^2 > 0$. Ainsi, λ est un réel > 0 car $a(f,f)$ est aussi un réel > 0. Il suit, $\parallel f \parallel_2^2 = \lambda a(f,f) \geqslant m\lambda \parallel f \parallel_2^2$ alors $m\lambda \leqslant 1$. Donc, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{m}$.

6.(11) Soit v un vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{1}{m}$. Alors v est non nul et $S(v) = \frac{1}{m}v$. Par linéarité, $S(\Re e\,(v)) = \frac{1}{m}\Re e\,(v)$ et $S(\Im m\,(v)) = \frac{1}{m}\Im m\,(v)$ car d'après la relation (2), $\Re e\,(S(v)) = S(\Re e\,(v))$ et $\Im m\,(S(v)) = S(\Im m\,(v))$. Comme v est non nul, alors l'un au moins des deux vecteurs $\Re e\,(v)$ et $\Im m\,(v)$ est non nul qui est en plus dans $Ker(S - \frac{1}{m}1)$. Donc, on peut supposer au départ que v est à valeurs réelles. On pose $|v| = (|v_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_n = 1$ si $v_n \geqslant 0$ et $\varepsilon_n = -1$ si $v_n < 0$. Alors, pour tout $w \in \mathbf{h}_\kappa$, la suite $\varepsilon w = (\varepsilon_n w_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{h}_\kappa$ et $\mathcal{N}(\varepsilon w) = \mathcal{N}(w)$. On a alors pour tout $w \in \mathbf{h}_\kappa$,

$$a(S(|v|),w) = \langle |v|, w\rangle = \langle v, \varepsilon w\rangle = a(S(v),\varepsilon w) = \frac{1}{m}a(v,\varepsilon w) = \frac{1}{m}a(|v|,w)$$

Donc, $S(|v|) = \frac{1}{m}|v|$. Ainsi $Ker(S - \frac{1}{m}1)$ contient une suite, notée encore v, à valeurs positives. En fait, d'après 6.(7), comme la suite v est à valeurs positives et non identiquement nulle alors son image $S(v)$ par S est à valeurs strictement positives. Il en est de même pour $v = mS(v)$. Il est immédiat que , $Vect\{v\} \subset Ker(S - \frac{1}{m}1)$. Inversement, soit $f \in Ker(S - \frac{1}{m}1)$, $S(f) = \frac{1}{m}f$ et d'après ce qui précède on a aussi $S(|f|) = \frac{1}{m}|f|$. On a $f \in Vect\{v\}$ même démonstration que précédemment.