

## Agrégation Interne de Mathématiques 2012

### Liste des sujets de la session 2012.

---

#### Leçons d'algèbre et géométrie

- 101** : Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.  
**102** : Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.  
**103** : Congruences dans  $\mathbf{Z}$ , anneau  $\mathbf{Z}=n\mathbf{Z}$ . Applications.  
**104** : Nombres premiers.  
**106** : PGCD dans  $K[X]$ , où  $K$  est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.  
**107** : Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs.  
**109** : Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples.  
**110** : Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.  
**112** : Changements de bases en algèbre linéaire. Applications.  
**113** : Déterminants. Applications.  
**114** : Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications.  
**117** : Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.  
**119** : Utilisation des nombres complexes en géométrie.  
**120** : Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Applications.  
**121** : Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Applications géométriques.  
**123** : Isométries du plan affine euclidien, formes réduites. Applications.  
**125** : Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, formes réduites.  
**128** : Barycentres. Applications.  
**129** : Droites et plans dans l'espace.  
**131** : Applications affines en dimension finie. Propriétés et exemples.  
**137** : Droites et cercles dans le plan affine euclidien. **142** : Utilisation de groupes en géométrie.
- 143** : Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.  
**144** : Différentes notions de rang en algèbre linéaire.  
**146** : Coniques.  
**148** : Angles dans le plan.  
**150** : Diverses factorisations de matrices.  
**151** : Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.  
**155** : Systèmes linéaires.  
**156** : Valeurs propres. Recherche et utilisation.  
**157** : Arithmétique dans  $\mathbf{Z}$ .  
**158** : Actions de groupes. Exemples et applications.  
**159** : Algorithme d'Euclide. Calcul de PGCD et de coefficients de Bézout. Applications.  
**160** : Algorithme du pivot de Gauss. Applications.  
**163** : Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications.  
**164** : Combinatoire et dénombrements.  
**165** : Idéaux d'un anneau commutatif. Exemples.  
**166** : Diverses méthodes de codage et de cryptage.

## Leçons d'analyse et probabilités

---

- 201** : Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications.
- 202** : Séries à termes réels positifs. Applications.
- 203** : Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence (les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs étant supposés connus).
- 204** : Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes.
- 205** : Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation des fonctions.
- 206** : Parties compactes de  $\mathbf{R}^n$ . Fonctions continues sur une telle partie. Exemples et applications.
- 207** : Théorème des valeurs intermédiaires. Applications en analyse, en analyse numérique.
- 208** : Théorème du point fixe. Applications.
- 209** : Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.
- 210** : Séries entières de variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.
- 212** : Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples.
- 213** : Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques, nombre  $e$ .
- 215** : Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.
- 216** : Théorèmes des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles. Applications.
- 217** : Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
- 218** : Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.
- 219** : Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples
- 220** : Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou estimation de l'erreur.
- 221** : Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de  $\mathbf{R}$  (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples.
- 222** : Intégrale d'une fonction numérique continue par morceaux sur un segment. Propriétés.
- 223** : Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.
- 224** : Équations différentielles linéaires d'ordre deux :  $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ , où  $a$ ;  $b$ ;  $c$  sont des fonctions continues sur un intervalle de  $\mathbf{R}$ , à valeurs réelles ou complexes.
- 225** : Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants ; écriture matricielle. Exemples.
- 227** : Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité. Fonctions composées. Fonctions de classe  $C^1$ . Exemples.
- 228** : Extremums pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.
- 229** : Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variable aléatoire de loi binomiale. Approximations de cette loi.
- 230** : Probabilité conditionnelle et indépendance. Variables aléatoires indépendantes. Variance, covariance.
- 231** : Espérance, variance ; loi faible des grands nombres.
- 232** : Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.
- 235** : Fonction exponentielle de variable réelle, complexe, matricielle. . .
- 236** : Continuité, dérivabilité, prolongements des fonctions d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
- 237** : Intégrales et primitives.
- 241** : Diverses notions de convergence en analyse ou en probabilités. Exemples.

- 243** : Différentiabilité d'une fonction numérique de deux variables réelles, gradient ; applications.
- 244** : Inégalités en analyse ou en probabilités. Par exemple : Cauchy-Schwarz, Markov, Bessel, convexité. . .
- 246** : Applications de l'analyse au calcul des grandeurs (longueur, aire, volume. . .).
- 249** : Loi normale en probabilités et statistique.
- 251** : Algorithmes de résolution approchée d'une équation numérique.
- 252** : Algorithmes de calcul approché d'intégrales.
- 253** : Algorithmes d'approximation des solutions d'une équation différentielle.
- 254** : Algorithmes d'approximation du nombre  $\pi$ .
- 256** : Vitesse de convergence, accélération de convergence.
- 257** : Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels.
- 258** : Couples de variables aléatoires possédant une densité. Covariance. Exemples d'utilisation.
- 259** : Utilisation de la loi binômiale en probabilités et en statistique.

## Exemples et exercices d'algèbre et géométrie.

---

- 301** : Exercices sur les groupes.
- 302** : Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ .
- 304** : Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.
- 305** : Exercices faisant intervenir les nombres premiers.
- 306** : Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM et mettant en œuvre des algorithmes associés.
- 307** : Exercices faisant intervenir des dénombrements.
- 309** : Exercices faisant intervenir des polynômes et fractions rationnelles.
- 310** : Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
- 311** : Exercices illustrant l'usage de la notion de rang dans des domaines variés.
- 312** : Exercices illustrant l'emploi de matrices inversibles dans des domaines variés.
- 313** : Exercices illustrant l'utilisation de systèmes linéaires.
- 314** : Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.
- 315** : Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés.
- 317** : Exercices sur les endomorphismes diagonalisables.
- 319** : Exercices faisant intervenir des algorithmes de calcul matriciel.
- 321** : Exercices faisant intervenir la réduction des matrices symétriques réelles dans des domaines variés.
- 322** : Exercices sur les formes quadratiques.
- 323** : Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.
- 325** : Exercices faisant intervenir des isométries  $a_n$  en dimensions 2 et 3.
- 326** : Exercices faisant intervenir la notion de barycentre ou d'application  $a_n$ .
- 328** : Exemples d'utilisation de transformations en géométrie.
- 329** : Exercices sur les aires et les volumes.
- 330** : Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimensions 2 et 3.
- 334** : Exercices sur les coniques.
- 335** : Exercices sur les courbes planes ou de l'espace de dimension 3.
- 339** : Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.
- 340** : Exercices faisant intervenir des groupes en géométrie.
- 342** : Exercices de géométrie faisant intervenir le choix d'un repère.
- 345** : Exercices sur les triangles.

- 346** : Exemples de problèmes modélisés par des graphes.
- 347** : Exercices faisant intervenir la trigonométrie.
- 348** : Exercices illustrant l'emploi de puissances ou d'exponentielles de matrices.
- 349** : Exemples de méthodes de cryptage ou de codage.
- 350** : Exercices faisant intervenir des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice.
- 351** : Exercices faisant intervenir des polynômes irréductibles.
- 353** : Exercices utilisant la notion d'élément nilpotent.
- 354** : Exercices sur les cercles et les sphères.

## Exemples et exercices d'analyse et probabilités

---

- 401** : Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes.
- 402** : Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.
- 403** : Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.
- 404** : Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.
- 405** : Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.
- 406** : Exemples de comportement asymptotique de suites ; rapidité de convergence.
- 407** : Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.
- 408** : Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.
- 409** : Exercices sur les suites de polynômes orthogonaux.
- 410** : Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.
- 411** : Exemples d'étude de fonctions définies par une série.
- 412** : Exemples de développements en série entière. Applications.
- 413** : Exemples d'emploi de séries entières ou trigonométriques pour la recherche de solutions d'équations différentielles.
- 414** : Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.
- 415** : Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.
- 417** : Exemples illustrant divers modes d'approximation de fonctions numériques.
- 418** : Exemples d'utilisation de développements limités de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 421** : Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
- 422** : Exemples d'étude d'intégrales impropres.
- 423** : Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.
- 425** : Exemples de calculs d'aires et de volumes.
- 426** : Exemples et applications de calculs d'intégrales multiples.
- 427** : Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
- 428** : Exemples d'étude et de résolution d'équations différentielles scalaires.
- 429** : Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires.
- 430** : Exemples d'équations différentielles issues des sciences expérimentales ou de l'économie.
- 431** : Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables réelles.
- 432** : Exemples d'approximations d'un nombre réel.
- 433** : Approximations du nombre  $\pi$
- 434** : Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.
- 435** : Exemples d'étude probabiliste de situations concrètes.

- 436** : Exemples d'applications de l'intégration par parties.
- 437** : Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.
- 438** : Exemples de problèmes de dénombrement. Utilisation en probabilités.
- 439** : Exemples d'étude et de calcul de la norme d'une application linéaire continue.
- 440** : Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure. . .).
- 441** : Exemples de systèmes différentiels linéaires en dimension 2 ou 3. Allure des trajectoires.
- 442** : Exercices illustrant l'utilisation des probabilités dans des domaines variés des mathématiques.
- 443** : Exemples de méthodes et d'algorithmes de résolution approchée d'équations  $F(X) = 0$ ,  $X$  désignant une variable réelle ou vectorielle.
- 444** : Exemples d'algorithmes de calcul approché de la limite d'une suite, de la somme d'une série.
- 445** : Exemples de résolution exacte et de résolution approchée d'équations différentielles scalaires.
- 447** : Exemples d'équations fonctionnelles.
- 448** : Exemples d'utilisation d'intervalles de fluctuation et d'intervalles de confiance.