Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud
13 novembre 2012

Exercice 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. Restitution organisée de connaissance

a. Somme de fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$, φ est dérivable sur cet intervalle et $\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - x > 0$ d'après le troisième résultat admis.
φ est donc une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$ et comme $\varphi(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1$ qui est donc le minimum de φ sur $[0\,;+\infty[$, on a donc $\varphi(x) \geqslant 1$ pour tout x de $[0\,;+\infty[$.

b. Le résultat précédent s'écrit donc pour tout x de $[0\,;+\infty[$:
$\varphi(x) \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{x^2}{2} = +\infty$, par comparaison (quatrième résultat admis), $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

2. **a.** *Méthode 1* : $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}$.
Posons $u(x) = \frac{1}{2}x$, alors $f(x) = \dfrac{u}{\mathrm{e}^u} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^u}{u}}$.
Si x tend vers plus l'infini, u tend vers plus l'infini. On a démontré au 1. que $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty$ et par conséquent $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^u}{u}} = 0$, soit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
Méthode 2 : $f(x) = -\left(-\dfrac{1}{2}x\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.
Posons $u(x) = -\dfrac{1}{2}x$; on a donc $f(x) = -u\mathrm{e}^u$.
Si x tend vers $+\infty$, u tend $-\infty$. On sait que $\lim\limits_{u\to-\infty} u\mathrm{e}^u$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. f produit de fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} - \dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(1 - \dfrac{1}{2}x\right)$.
Comme $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} > 0$, quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de la différence $1 - \dfrac{1}{2}x$.
$1 - \dfrac{1}{2}x > 0 \iff 1 > \dfrac{1}{2}x \iff 2 > x$.
De même $1 - \dfrac{1}{2}x < 0 \iff 1 < \dfrac{1}{2}x \iff 2 < x$.
Donc f est croissante sur $[0\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;+\infty[$.
On a $f(0) = 0$ et $f(2) = \dfrac{1}{2} \times 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\times 2} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

Partie B

1. **a.** u est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $u'(t)=ae^{-\frac{1}{2}t}-\dfrac{1}{2}ate^{-\frac{1}{2}t}$.

Donc $u'(t)+\dfrac{1}{2}u(t)=ae^{-\frac{1}{2}t}-\dfrac{1}{2}ate^{-\frac{1}{2}t}+\dfrac{1}{2}ate^{-\frac{1}{2}t}=ae^{-\frac{1}{2}t}$

u est solution de (E) si $ae^{-\frac{1}{2}t}=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\iff a=\dfrac{1}{2}$.

La fonction $t\longmapsto u(t)=\dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$ est solution de (E).

b. On vient de voir que $u(t)=\dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$ est solution de (E) soit :

$\star\quad u'(t)+\dfrac{1}{2}u(t)=\dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$.

v est solution de $(E)\iff v'(t)+\dfrac{1}{2}v(t)=\dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}\iff$ par différence avec l'égalité $\star$

$v'(t)+\dfrac{1}{2}v(t)-\left(u'(t)+\dfrac{1}{2}u(t)\right)=\dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}-\dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}\iff$

$v'(t)-u'(t)+\dfrac{1}{2}v(t)-\dfrac{1}{2}u(t)=0\iff(v-u)'(t)+\dfrac{1}{2}(v-u)(t)=0$

c'est-dire si et seulement si la fonction $h=v-u$ est solution de l'équation $\left(E'\right)$.

c. Soit y une solution de l'équation, donc $y'+\dfrac{1}{2}y=0\quad\star\star$.

Posons $z(t)=e^{\frac{1}{2}t}y$. z est dérivable et

$z'(t)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}y+e^{\frac{1}{2}t}y'=e^{\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{2}y+y'\right)=e^{\frac{1}{2}t}\times 0$(d'après $\star\star$) $=0$.

La fonction z de dérivée nulle est donc une constante $K\in\mathbb{R}$.

$z(t)=e^{\frac{1}{2}t}y=K\iff y=Ke^{-\frac{1}{2}t},K\in\mathbb{R}$.

d. On a vu au **b.** que les solutions v de l'équation (E) sont telles que $v-u=v-\dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$ sont solutions de $\left(E'\right)$. Donc d'après la question précédente :

$v-\dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}=Ke^{-\frac{1}{2}t}\iff v=\left(K'+\dfrac{1}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}$.

Les solutions de (E) sont les fonctions $t\longmapsto\left(K+\dfrac{1}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t},\quad K'\in\mathbb{R}$.

2. La solution $y(t)=\left(K+\dfrac{1}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}$ vérifie :

$y(0)=0\iff Ke^{-\frac{1}{2}\times 0}=0\iff K=0$.

La solution est donc définie par $t\longmapsto\dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}=f(t)$.

3. **a.** On a vu que sur $[2\,;+\infty[$, f est décroissante. L'algoreithme fait calculer successivement $f(3)$, $f(4)$,… : ces valeurs décroissent vers zéro, donc l'algorithme va s'arrêter dès qu'une image $f(n)$ sera inférieure à 0,1. Cette valeur de n sera celle donnée à la sortie de le l'algorithme.

b. La calculatrice donne $f(7)\approx 0,107,\quad f(8)\approx 0,073$: $n_0=8$.

c. La réponse précédente peut se traduire par : à partir 8+8 = 16 h il restera dans le corps moins de 0,1 g de principe actif soit moins de 10 %.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. M d'affixe z est invariant si et seulement si $M'=M\iff z'=z\iff\dfrac{2iz}{z-i}=z\iff z(z-i)=2iz\iff z(z-i-2i)=0\iff z(z-3i)=0\iff z=0$ ou $z=3i$.

Les points invariants par f sont O et le point d'affixe 3i.

2. On a $z_{B'} = \dfrac{2\text{i}z_B}{z_B - \text{i}} = \dfrac{2\text{i}\times 2\text{i}}{2\text{i}-\text{i}} = \dfrac{-4}{\text{i}} = 4$.

$z_{C'} = \dfrac{2\text{i}z_C}{z_C - \text{i}} = \dfrac{2\text{i}\times 1}{1-\text{i}} = \dfrac{2\text{i}(1-\text{i})}{(1-\text{i})(1+\text{i})} = \dfrac{2\text{i}(1-\text{i})}{2} = \text{i}(1-\text{i}) = 1+\text{i}$.

3. **a.** Pour tout point M distinct de A, l'affixe z' de M' est telle que :

$z' = \dfrac{2\text{i}z}{z-\text{i}} \Rightarrow z' - 2\text{i} = \dfrac{2\text{i}z}{z-\text{i}} - 2\text{i}$

$z' - 2\text{i} = \dfrac{2\text{i}z}{z-\text{i}} - \dfrac{2\text{i}(z-\text{i})}{z-\text{i}} = \dfrac{2\text{i}z - 2\text{i}z - 2}{z-\text{i}} = \dfrac{-2}{z-\text{i}}$.

b. On a $\left|z' - 2\text{i}\right| = \text{B}M'$ et

$\left|\dfrac{-2}{z-\text{i}}\right| = \dfrac{|-2]}{|z-\text{i}|} = \dfrac{2}{\text{A}M}$.

L'égalité précédente : $z' - 2\text{i} = \dfrac{-2}{z-\text{i}}$ se traduit en termes de modules par : $\text{B}M' = \dfrac{2}{\text{A}M}$.

Si M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1, alors $\text{A}M = 1$, donc $\text{B}M' = \dfrac{2}{1} = 2$.

Conclusion : si M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1, alors M' appartient au cercle Γ' de centre B et de rayon 2.

c. Pour les arguments : $z'-2\text{i} = \dfrac{-2}{z-\text{i}} \rightarrow \arg(z'-2\text{i}) = \arg\left(\dfrac{-2}{z-\text{i}}\right) \iff \arg(z'-2\text{i}) = \arg(-2) - \arg(z-\text{i}) \iff$

$\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{B}M'}\right) = 0 - \left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{A}M}\right) \iff \left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{B}M'}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{A}M}\right)$.

d. On calcule $\text{AD}^2 = |z_D - z_A|^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2} - 1\right)^2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$.

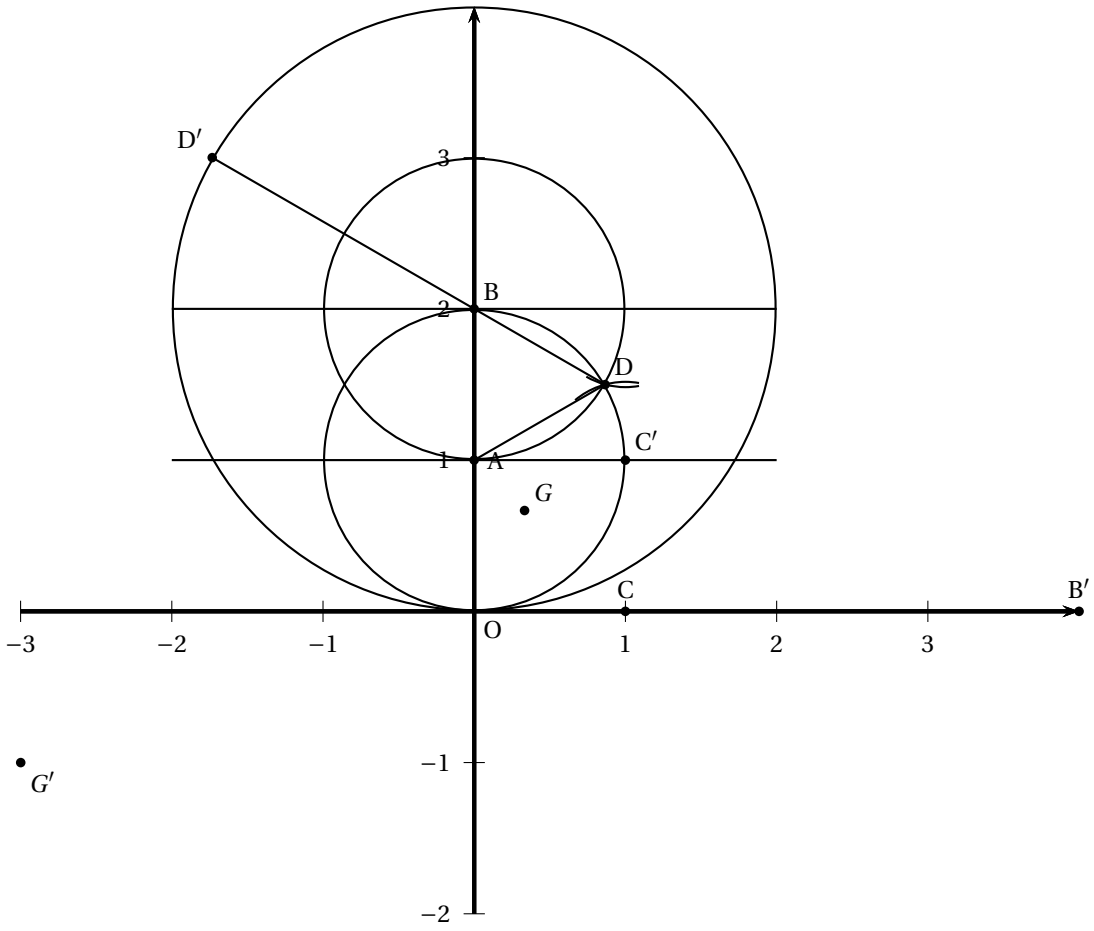
$\text{AD}^2 = 1 \Rightarrow = 1$, donc D appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1. D'après les résultats de la question précédente, D appartenant à Γ, son image D$'$ appartient à Γ' cercle de centre B et de rayon 2 ; de plus (BM') fait avec la direction de l'axe des abscisses un angle opposéé à celui que fait (AM) avec le même axe des abscisses. D'où la constructifn à la règle et au compas. (voir figure à la fin)

4. **a.** Par définition $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} \iff 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \iff \overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

On a donc $z_G = \dfrac{1}{3}(z_B b + z_C) = \dfrac{1}{3}(2\text{i}+1) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\text{i}$.

b. On calcule l'affixe de $\overrightarrow{G'O} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}$ c'est-dire $z_{\overrightarrow{G'O}} + z_{\overrightarrow{G'B'}} + z_{\overrightarrow{G'C'}} = 3 + \text{i} + 4 + 3 + \text{i} + 1 + \text{i} + 3 + \text{i} = 14 + 4\text{i} \neq 0$.

Conclusion : G' n'est pas l'isobarycentre de O, B$'$ et C$'$. Ce qui est évident sur la figure



Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. On a par définition de la similitude de rapport k :
BC = kAB soit $1 = kL$;
CE = k BC soit $L - 1 = k \times 1$ soit en reportant dans l'équation précédente :
$1 = L(L-1) \iff L^2 - L - 1 = 0 \iff \left(L - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} - 1 = 0 \iff \left(L - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = 0 \iff \left(L - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(L - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \iff L - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 0$ ou $L - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 0 \iff L = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ou $L = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Seule la solution positive est valable : $L = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or).

2. **a.** La droite (AB) a pour image la droite (BC). L'angle de la similitude est donc égale à $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{BC}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$.

On a vu que $1 = kL$, donc $k = \dfrac{1}{L} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)} = \dfrac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{1-5} = \dfrac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{-4} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

b. Ω est par définition invariant par f, donc aussi par $f \circ f$.
$f \circ f(\Omega) = \Omega$;
Par f, A a pour image B et B a pour image C, donc
$f \circ f(\text{A}) = \text{C}$;
Par f, B a pour image C et C a pour image E, donc
$f \circ f(\text{B}) = \text{E}$;

c. La composée des deux similitudes de centre Ω est une similitude de centre Ω, dont le rapport est le produit des rapports soit k^2 et l'angle la somme des angles soit π.

d. A et C sont alignés avec Ω : Ω appartient à la droite (AC) ;
B et E sont alignés avec Ω : Ω appartient à la droite (BE), donc Ω est le point commun aux droites (AC) et (BE).

3. **a.** L'image par f de la droite (AB) est la droite (BC) et l'image du point C est le point E.
Comme (CD) est parallèle à (AB) son image par f est la parallèle à (BC) contenant E, donc la droite (EF).

b. On sait que $\left(\overrightarrow{\Omega\text{E}}\,,\,\overrightarrow{\Omega}\,\text{E}'\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Or on a vu que la droite (BE) est l'image de la droite (AC) par f, donc (AC) $\perp$ (BE).
D'après la question précédente le point E′ appartient à la droite (EF) et aussi à (AC).
Conclusion : le point E′ est le point commun aux droites (EF) et (AC).

Partie B

1. Dans le sepère choisi on a A(0 ; 0), B$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,0\right)$ et C$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,1\right)$
L'écriture complexe de la similitude directe est $z' = az + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. En utilisant les images de A et de B par f : on a

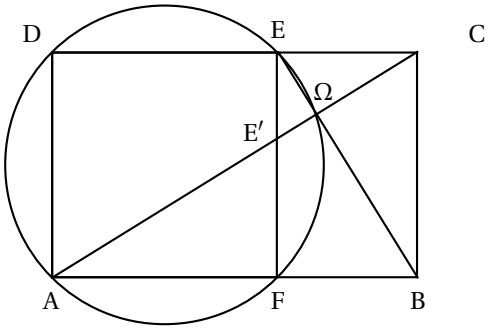
$$\left\{\begin{array}{lcl} z_\text{B} &=& az_\text{A} + b \\ z_\text{C} &=& az_\text{B} + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{1+\sqrt{5}}{2} &=& a \times 0 + b \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \text{i} &=& a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{1+\sqrt{5}}{2} &=& b \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \text{i} &=& a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{1+\sqrt{5}}{2} &=& b \\ \text{i} &=& a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b &=& \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ a &=& \frac{2}{1+\sqrt{5}}\text{i} \end{array}\right. .$$

$a = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}\text{i} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4}\text{i} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\text{i}$.
L'écriture complexe de f est donc :

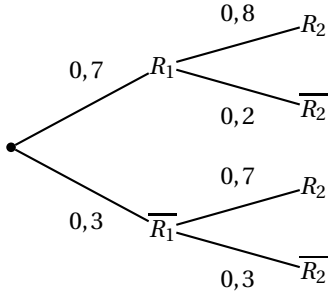
$$z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\text{i}z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2. On a $z_\text{D} = \text{i}$. En utilisant le résultat précédent et si D′ est l'image de D par f :
$z_{\text{D}'} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\text{i}z_\text{D} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\text{i} \times \text{i} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 = z_\text{F}$.
On peut également dire que D appartient à (CD), donc son image appartient à l'image de (CD) qui est la droite (EF)
D appartient à (AD), donc son image appartient à l'image par f de (AD) ; or A est invariant, donc l'image de (AD) est la perpendiculaire à (AD) contenant A, soit (AB).
Conclusion : D′′ appartient à (EF) et à (AD) : c'est leur point commun F.



Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. **a.** On a l'arbre de probabilités suivant :

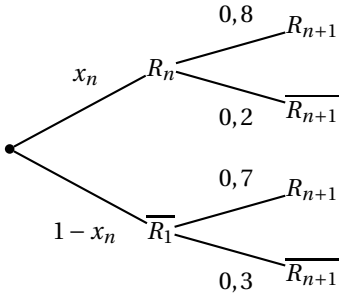


On a $p(X=2)=0,7\times0,8=0,56$;
$p(X=1)=0,7\times0,2+0,3\times0,7=0,14+0,21=0,35$;
$p(X=0)=0,3\times0,3=0,09$

b. $\text{E}(X)=2\times0,56+1\times0,35+0\times0,09=1,12+0,35=1,47\approx1,5$.

2. **a.** D'après l'énoncé $P_{R_n}(R_{n+1})=0,8$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})=0,7$.

b. On construit un arbre analogue :



On a donc $x_{n+1}=x_n\times0,8+(1-x_n)\times0,7=0,8x_n-0,7x_n+0,7=0,7+0,1x_n$.

3. **a.** Quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $n\neq0$, $u_{n+1}=9x_{n+1}-7=9(0,7+0,1x_n)-7=6,3+0,9x_n-7=0,9x_n-0,7=0,1(9x_n-7)=0,1u_n$.

$u_{n+1}=0,1u_n$ quel que soit le naturel n non nul signifie que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,1, de premier terme $u_1=9x_1-7=9\times0,7-7=-0,7$.

b. On sait que pour tout naturel n, $u_n=u_1\times r^{n-1}=-0,7\times0,1^{n-1}$.
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}0,1^{n-1}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.
Par suite, comme $x_n=\dfrac{u_n+7}{9}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{7}{9}\approx0,777\,778$.
Sur un très grand nombre de services le pourcentage de services réussis se rapproche de 77,8 %.

Exercice 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. Intersection avec $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\right)$: avec $y=z=0$, on obtient $\text{A}\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$.
Intersection avec $\left(\text{O}\,;\,\vec{\jmath}\right)$: avec $x=z=0$, on obtient $\text{B}(0\,;\,-1\,;\,0)$.
Intersection avec $\left(\text{O}\,;\,\vec{k}\right)$: avec $x=y=0$, on obtient $\text{A}\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.
On a $\text{AB}^2=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$;
$\text{AC}^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{13}{36}$;
$\text{BC}^2=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$;
Donc tous les côtés ont des longueurs différentes : affirmation fausse.

2. $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\delta_1\cap\mathscr{P}\iff 2(1+t)-(5-4t)+3(2-2t)-1=0\iff 2+2t-5+4t+6-6t-1=0\iff 2=0$ égalité fausse : affirmation fausse

3. δ_1 a un vecteur directeur $\overrightarrow{\delta_1}\,(1\,;\,-4\,;\,-2)$;
δ_2 a un vecteur directeur $\overrightarrow{\delta_2}\,(-1\,;\,+4\,;\,2)$.
Ces deux vecteurs sont colinéaires ($\overrightarrow{\delta_2}=-\overrightarrow{\delta_1}$), donc les droites sont parallèles : affirmation vraie.

4. $\mathscr{P}$ a un vecteur normal $\vec{n}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$.
La perpendiculaire à $\mathscr{P}$ contenant S a pour vecteur directeur $\vec{n}$.
Une équation paramétrique de cette perpendiculaire est donc :
$$\begin{cases} x &= 1+2t\\ y &= 3-t\\ z &= 5+3t\end{cases}$$
Cette perpendiculaire coupe le plan $\mathscr{P}$ en un point éventuel dont les coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{P}$ c'est-à-dire si :
$2(1+2t)-(3-t)+3(5+3t)-1=0\iff 2+4t-3+t+15+9t-1=0\iff 14t+13=0\iff t=-\dfrac{13}{14}$.
En reportant cette valeur dans l'équation paramétrique, on obtient les cordonées du projeté orthogonal de S sur $\mathscr{P}$:
$$\begin{cases} x &= 1+2\times\left(-\frac{13}{14}\right)\\ y &= 3-\left(-\frac{13}{14}\right)\\ z &= 5+3\left(-\frac{13}{14}\right)\end{cases}\iff\begin{cases} x &= -\frac{12}{14}\\ y &= \frac{55}{14}\\ z &= \frac{31}{14}\end{cases}\iff\begin{cases} x &= -\frac{6}{7}\\ y &= \frac{55}{14}\\ z &= \frac{31}{14}\end{cases}$$
Affirmation vraie.

5. On calcule la distance du point S au plan $\mathscr{P}$:
$$d(\text{S}\,;\,\mathscr{P})=\frac{\left|2x_\text{S}-y_\text{S}+3z_\text{S}-1\right|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}=\frac{|2-3+15-1|}{\sqrt{14}}=\frac{13}{\sqrt{14}}\approx 3,4>3.$$
La distance du point S au plan $\mathscr{P}$ est supérieure au rayon de la sphère : cela signifie que la sphère et le plan n'ont pas de point commun : affirmation fausse.