Math93.com
MathExams.fr

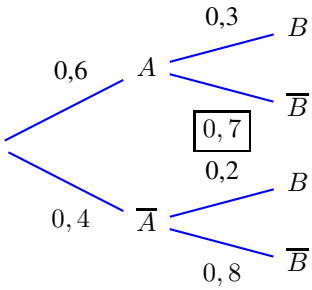
Baccalauréat 2014 - ES/L Métropole

Série ES/L Obli. et Spé.
Vendredi 20 juin 2014
Correction

Exercice 1. QCM — 5 points

Commun à tous les candidats

1. Réponse c : $\boxed{P_A\left(\overline{B}\right) = 0,7}$



2. Réponse c : $\boxed{P(B) = 0,26}$

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(B) &= p\left(B \cap A\right) + p\left(B \cap \overline{A}\right) \\ &= p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p\left(\overline{A}\right) \\ &= 0,3 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4 \\ p(B) &= 0,26 \end{aligned}$$

3. Réponse c : $\boxed{\text{F est décroissante sur } [4\,;\,12]}$.

x	1		3		4		12		15
$f(x)$	3	↘	0	↘	-2	↗	-1	↘	-3

La fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ donc :

$$\forall x \in [1\,;\,15]\,;\; F'(x) = f(x)$$

Or d'après le tableau de variations de la fonction f on peut déduire le signe de $f(x) = F'(x)$.

x	-1		3		15
$f(x) = F'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de F		↗		↘	

La fonction F est décroissante sur l'intervalle [3 ; 15] donc aussi sur [4 ; 12] puisque $[4\,;\,12] \subset [3\,;\,15]$.

4. Réponse d : $\boxed{x^2+3x=8}$

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,;\ \ln x+\ln(x+3)=3\ln 2 \iff \ln x(x+3)=\ln 2^3$$

En composant pas la fonction exponentielle ou en invoquant l'injectivité de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\ln x+\ln(x+3)=3\ln 2 \iff x(x+3)=2^3=8$$

$$\boxed{\ln x+\ln(x+3)=3\ln 2 \iff x^2+3x=8}$$

5. Réponse a : $\boxed{5(\ln 6-\ln 2)}$

Puisque la fonction g est clairement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=2$ et $x=6$, est donnée par

$$\begin{aligned}\int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_2^6 \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \Big[5\ln|x|\Big]_2^6\\ &= 5\ln 6-5\ln 2\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x=5(\ln 6-\ln 2)}$$

Exercice 2. Obligatoire — 5 points

Candidats de ES n'ayant pas choisi la spécialité et candidats de L

A l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de 1 500 m^2 entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50m^2 et la remplace par du gazon.

Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à -dire à l'automne $2010+n$. On a donc $u_0 = 1\,500$.

1. Calculer u_1.

« *20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50m^2 et la remplace par du gazon,* » donc en 2011 il reste 80 % de la surface engazonnée de l'année précédente auquel on ajoute 50m^2. De ce fait :

$$\boxed{u_1 = 0,8\,u_0 + 50 = 0,8 \times 1\,500 + 50 = 1\,250}$$

2. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.

« *Mais tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50m^2 et la remplace par du gazon,* » donc en $(2010+n+1)$ il reste 80 % de la surface engazonnée de l'année $(2010+n)$ auquel on ajoute 50m^2. De ce fait :

$$\boxed{u_{n+1} = 0,8\,u_n + 50}$$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par : $v_n = u_n - 250$.

3. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 250 \\ &= 0,8u_n + 50 - 250 \\ &= 0,8u_n - 200 \\ &= 0,8\left(u_n - \frac{200}{0,8}\right) \\ &= 0,8\,(u_n - 250) \\ v_{n+1} &= 0,8\,v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite **géométrique de raison $q = 0,8$**
et de premier terme $v_0 = u_0 - 250 = 1\,500 - 250 = 1\,250$.

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 &= 1\,250 \\ v_{n+1} &= 0,8v_n \end{cases} ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 250 + 1\,250 \times 0,8^n$.

On peut donc écrire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = 1\,250 \times 0,8^n}$$

De l'égalité $v_n = u_n - 250$ définie pour tout entier n, on peut en déduire l'expression de $u_n = v_n + 250$ soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = 250 + 1\,250 \times 0,8^n}$$

3. c. Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?

On calcule

$$u_4 = 250 + 1250 \times 0,8^4 = 762$$

Donc **762 m^2 du terrain est encore engazonné au bout de 4 ans.**

4. 4. a. Déterminer par le calcul la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que : $250 + 1\,250 \times 0,8^n < 500$. Interpréter le résultat obtenu.

$$250 + 1\,250 \times 0,8^n < 500 \iff 1\,250 \times 0,8^n < 250$$
$$\iff 0,8^n < \frac{250}{1\,250}$$

On compose par la fonction ln qui est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\iff n \ln 0,8 < \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln 5$$

on divise les deux membres par $\ln 0,8$ qui est négatif donc

$$\iff n > \frac{-\ln 5}{\ln 0,8} \approx 7,2$$

La plus petite valeur de l'entier naturel n telle que : $250 + 1\,250 \times 0,8^n < 500$ est donc $\boxed{n = 8}$.
A partir de la 8ème année la surface de gazon sera inférieure à 500 m².

4. b. Compléter l'algorithme fourni en annexe 1 pour qu'il affiche la solution obtenue à la question précédente.

Initialisation	
	u prend la valeur 1 500
	n prend la valeur 0
Traitement	
	Tant que $\boxed{u \geq 500}$ faire
	u prend la valeur $\boxed{0,8 \times u + 50}$
	n prend la valeur $\boxed{n + 1}$
	Fin Tant que
Sortie	
	Afficher n

5. Claude est certain que les mauvaises herbes ne peuvent envahir la totalité de son terrain. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

Théorème 1

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

De ce fait, ici $-1 < q = 0,8 < 1$ et d'après le théorème 2 :

$$\lim_{n \to +\infty} 1\,200 \times (0,8)^n = 0$$

on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = 250 + 1\,250 \times 0,8^n$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 250}$$

Il restera donc, au minimum, 250 m² de gazon. Claude a donc raison.

Exercice 2. Spécialité — 5 points

Candidats de ES ayant choisi la spécialité mathématiques

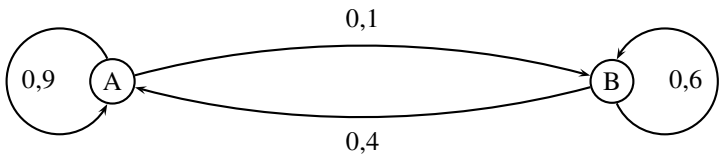
Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $0,9$.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $0,4$.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n-ième lancer ;

b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n-ième lancer ;

$P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n-ième lancer.

1. 1. a. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Alice atteint la cible » et B l'état « Alice manque sa cible »).



1. b. Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).
La matrice de transition M associée à ce graphe est :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}}$$

1. c. Justifier que $P_1 = (0,5 \quad 0,5)$ et $P_2 = (0,65 \quad 0,35)$.
Au premier lancer, elle a autant de chance d'atteindre la cible que de la manquer. Donc

$$\boxed{P_1 = (0,5 \quad 0,5)}$$

En outre

$$\boxed{P_2 = P_1 \times M = (0,65 \quad 0,35)}$$

2. 2. a. Montrer que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n$.
On a pour tout entier n

$$(a_{n+1} \;\; b_{n+1}) = P_{n+1} = P_n \times M = (0,9a_n + 0,4b_n \;\; 0,1a_n + 0,6b_n)$$

soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n}$$

2. b. En déduire que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.
On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; a_n + b_n = 1$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n \quad (1)$$
$$a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4 \times (1 - a_n) \quad (2)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4}$$

3. 3. a. Compléter l'algorithme fourni en annexe 1 de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au n-ième lancer.

Entrées	
	Saisir n
Traitement	
	a prend la valeur 0,5
	b prend la valeur 0,5
	Pour i allant de 2 à n
	a prend la valeur $\boxed{0,5 \times a + 0,4}$
	b prend la valeur $1 - a$
	Fin Pour
Sortie	
	Afficher a, b

3. b. Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $n = 5$.
Si $n = 5$ alors l'algorithme affiche

$$\boxed{a = 0,78125 \text{ et } b = 0,21875}$$

4. 4. a. On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n strictement positif par : $u_n = a_n - 0,8$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
Pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,8 \\ &= 0,5a_n + 0,4 - 0,8 \\ &= 0,5a_n - 0,4 \\ &= 0,5\left(a_n - \frac{0,4}{0,5}\right) \\ &= 0,5\,(a_n - 0,8) \\ u_{n+1} &= 0,5\,u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc une suite **géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,8 = 0,5 - 0,8 = -0,3$**.

$$\boxed{(u_n) : \begin{cases} u_1 & = -0,3 \\ u_{n+1} & = 0,5u_{n-1} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

4. b. Donner l'expression de u_n en fonction de n, puis en déduire que pour tout nombre entier naturel n strictement positif, $a_n = 0,8 - 0,3 \times 0,5^{n-1}$.
On peut donc écrire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; u_n = -0,3 \times 0,5^{n-1}}$$

De l'égalité $u_n = a_n - 0,8$ définie pour tout entier $n \geq 1$, on peut en déduire l'expression de $a_n = u_n + 0,8$ soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; a_n = 0,8 - 0,3 \times 0,5^{n-1}}$$

4. c. A long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'Alice atteigne la cible ?

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

De ce fait, ici $-1 < q = 0,5 < 1$ et d'après le théorème 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} 0,3 \times (0,5)^n = 0$$

on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ a_n = 0,8 - 0,3 \times 0,5^{n-1}$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (a_n) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0{,}8}$$

Sur le long terme, Alice à 80% de chance de toucher la cible.

4. d. Par quelle autre méthode aurait-on pu trouver le résultat précédent ?

On aurait pu montrer que que $P = (0,8 \quad 0,2)$ est un état stable du système.

Exercice 3. Probabilités — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Calculer la probabilité p pour que l'entrainement dure plus de 30 minutes.

Propriété 1

Soit X la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle [a ; b].

$$\forall x \in [a\ ;\ b]\ ;\ P(a \leq X \leq x) = \frac{x-a}{b-a} \tag{3}$$

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \tag{4}$$

La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle [20 ; 60] donc on a :

$$P(X > 30) = 1 - P(20 \leq X \leq 30) = 1 - \frac{30-20}{60-20} = \frac{60-30}{60-20}$$

$$\boxed{P(X > 30) = P(30 < X \leq 60) = \frac{60-30}{60-20} = \frac{3}{4} = 0,75}$$

2. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.

$$\boxed{E(X) = \frac{60+20}{2} = 40}$$

La durée moyenne d'entrainement d'Antoine est de 40 minutes.

Partie B

Dans cette partie les probabilités seront ; si besoin, arrondies au millième.

Les boules de billard américain avec lesquelles Antoine s'entraine sont dites de premier choix si leur diamètre est compris entre $56,75$ mm et $57,25$ mm ; sinon elles sont dites de second choix.

On note D la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée au hasard dans la production de l'entreprise, associe son diamètre, en millimètres. On suppose que D suit la loi normale d'espérance 57 et d'écart-type $0,11$.

1. Déterminer la probabilité p_1 que la boule prélevée ait un diamètre inférieur à 57 mm.

La variable aléatoire D suit la loi normale d'espérance $E(D) = 57 = m$ et d'écart-type $0,11$. Donc par définition,

$$\boxed{p_1 = P(D \leq 57) = P(D \leq m) = 0,5}$$

2. Déterminer la probabilité p_2 que la boule prélevée soit une boule de premier choix.

Une boule est de premier choix si son diamètre est compris entre $56,75$ mm et $57,25$ mm donc :

$$\boxed{p_2 = P(56,75 \leq D \leq 57,25) \approx 0,977}$$

3. En déduire la probabilité p_3 que la boule prélevée soit une boule de second choix.

En passant au complémentaire on a :

$$\boxed{p_3 = 1 - p_2 \approx 0,023}$$

Partie C

Le président de la fédération française de billard (FFB) souhaite estimer le niveau de satisfaction de ses 14 000 licenciés quant à l'organisation des tournois. Antoine estime que les 80 adhérents de son club constituent un échantillon représentatif des licenciés de la FFB. Il est chargé de faire une étude au sein de son club : les 80 adhérents ont répondu, et 66 ont déclaré qu'ils étaient satisfaits.

1. Quelle est, sur cet échantillon, la fréquence observée f de personnes satisfaites de la FFB ?

« *Les 80 adhérents ont répondu, et* 66 *ont déclaré qu'ils étaient satisfaits* » , donc sur cet échantillon, la fréquence observée f de personnes satisfaites de la FFB est de :

$$\boxed{f = \frac{66}{80} = 0,825 = 82,25\%}$$

2. Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance $0,95$ de la proportion p de licenciés satisfaits de la FFB. Les bornes de l'intervalle seront arrondies au millième.

On a $n = 80$, $f = 0,825$ alors :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 80 \geq 30 \\ \checkmark & nf = 66 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) = 14 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle de confiance au seuil de 95% est alors :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,825 - \frac{1}{\sqrt{80}} \,;\, 0,825 + \frac{1}{\sqrt{80}}\right]$$

soit puisque les borne sont :

- $0,825 - \dfrac{1}{\sqrt{80}} \approx 0{,}713\,196\,6$. On arrondit la borne inférieure par défaut au millième soit $\mathbf{0,713}$.
- $0,825 + \dfrac{1}{\sqrt{80}} \approx 0{,}936\,803$. On arrondit la borne supérieure par excès au millième soit $\mathbf{0,937}$.

$$\boxed{I \approx \left[0{,}713 \,;\, 0{,}937\right]}$$

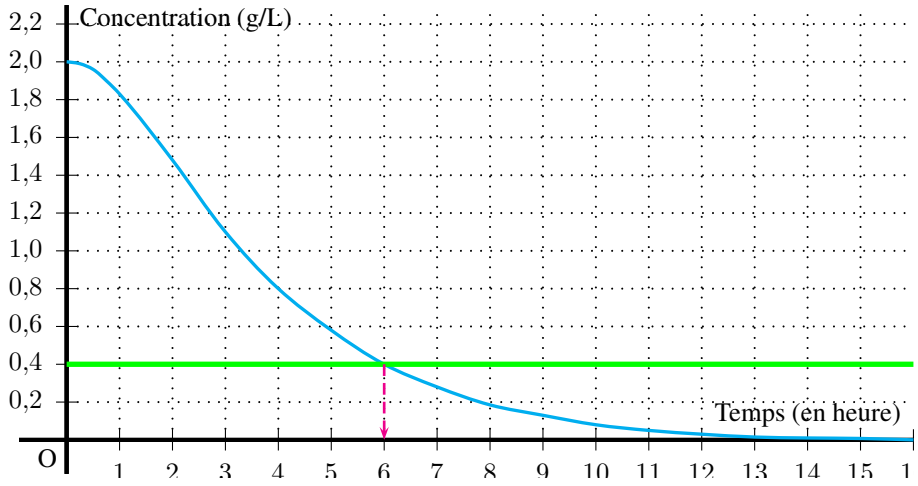
Exercice 4. Étude de fonction — 5 points

A. Étude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1. **la concentration à l'instant initial** ;
   A l'instant initial, la concentration est de **2 grammes par litre**.

2. **l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à $0,4$ gramme par litre**.
   La concentration est donc supérieure à **0,4 gramme par litre pendant environ 6 heures**.



On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.

B. Étude théorique :

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,15]$ par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. **On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Justifier que $f'(x) = -0,5x\mathrm{e}^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; 15].**

$$\forall x \in [0\,;\,15]\,;\ f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{\,-0,5x}$$

- La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,15]$ comme composée de fonctions qui le sont sur cet intervalle.
  De plus f est de la forme $u \times v$ donc sa dérivée est $(uv)' = u'v + uv'$ soit :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0\,;\,15]\,;\ f'(x) &= (x+2)'\ \ \mathrm{e}^{\,-0,5x} + (x+2)\ \left(\mathrm{e}^{\,-0,5x}\right)'\\ f'(x) &= \mathrm{e}^{-0,5x} + (x+2) \times (-0,5)\mathrm{e}^{-0,5x}\\ f'(x) &= \Big(1 - 0,5(x+2)\Big)\mathrm{e}^{-0,5x}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,15]\,;\ f'(x) = -0,5x\mathrm{e}^{-0,5x}}$$

- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $-0,5x$ qui est négatif sur l'intervalle $[0\,;\,15]$.

x	0	α	15
$f'(x)$	0	$-$	
Variations de f	$f(0) = 2$	0.1	$f(15) \approx 0.0094$

2. Justifier que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 15].

Théorème 3 (Corolaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848, Prague, Empire d'Autriche).

- La fonction f est **continue** et **strictement décroissante** sur l'intervalle [0 ; 15] ;
- L'image par f de l'intervalle [0 ; 15] est $[f(15)\ ;\ 2]$ d'après le tableau de variations.
- Le réel $k = 0$ appartient à l'intervalle image car $f(15) \approx 0.0094 < 0,1 < 15$.

Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = k = 0,1$ admet une solution unique α sur l'intervalle [0 ; 15].

3. Déterminer un encadrement de a d'amplitude un dixième.
Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

Avec un pas de $\Delta = 1$ on obtient : $\begin{cases} f(9) & \approx & 0,1222 > 0,1 \\ f(10) & \approx & 0,08086 < 0,1 \end{cases}$, donc $9 \leq \alpha \leq 10$.

Avec un pas de $\Delta = 0.1$ on obtient : $\begin{cases} f(9,4) & \approx & 0,10369 > 0,1 \\ f(9,5) & \approx & 0,09949 < 0,1 \end{cases}$, donc $\boxed{9,4 \leq \alpha \leq 9,5}$.

4. En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 15] et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

- La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle [0 ; 15] et d'après le logiciel de calcul formel on a

$$\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 15]\ ;\ f''(x) = (0,25x - 0,5)\mathrm{e}^{-0,5x}}$$

.

- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f''(x)$ est du signe de $(0,25x - 0,5)$. On obtient alors facilement :

x	0		2		15
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

- La fonction f est donc convexe sur [2 ; 15] et concave sur [0 ; 2]. $f''(x)$ change de signe en **2 qui est donc l'abscisse du point d'inflexion**.

C. Interprétation des résultats :

1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0, 1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
D'après la question **B.2.**, le médicament est actif sur la période $[0\ ;\ \alpha]$. **Il est donc actif pendant α heures**.

2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?
D'après la question **B.4.**, **la baisse de la concentration ralentit au bout de 2 heures**.