Math93.com

Baccalauréat 2015 - ES/L Asie

Série ES/L Obli. et Spé.
17 Juin 2015
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

Exercice 1. QCM — 5 points

Commun à tous les candidats

Question 1 (Réponse c)

1. On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 10 fois de suite. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de « pile » obtenus. La probabilité d'obtenir exactement 5 « pile » est, arrondie au centième :

a. 0,13 **b.** 0,19 **c.** 0,25 **d.** 0,5

- **Modélisation**
  Vérifions les hypothèses de validation d'une *loi binomiale*.
  - Une pièce a *2 états* : elle tombe sur « pile » ou pas. La probabilité d'obtenir « pile » est : $p = 0,5$.
  - Il y a 10« lancers ». Chacun est *indépendant, identique* et *aléatoire*.

  De ce fait, la variable aléatoire X désigne bien le nombre de succès d'une répétition, de manière *indépendante*, de 10 *épreuves de Bernoulli* de paramètre $p = 0,5$.

  La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,5$, notée $\mathscr{B}(10\,;\,0,5)$.

- **Calcul**
  Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,5$ on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{10}{k} \times 0,5^k \times (0,5)^{10-k}$$

  La probabilité d'obtenir exactement 5 « pile » se traduit par $p(X = 5)$ or :

$$p(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,5^5 \times (0,5)^{10-5}$$

$$p(X = 5) = 252 \times (0,5)^5 \times (0,5)^5$$

  Donc :

$$\boxed{p(X = 5) \approx 0,25}$$

La bonne réponse est la : réponse 1c.

Question 2 (Réponse b)

2. X est une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 3 et d'écart-type 2 ; alors une valeur approchée au centième de la probabilité $p(X \geqslant 5)$ est :

a. 0,14 **b.** 0,16 **c.** 0,32 **d.** 0,84

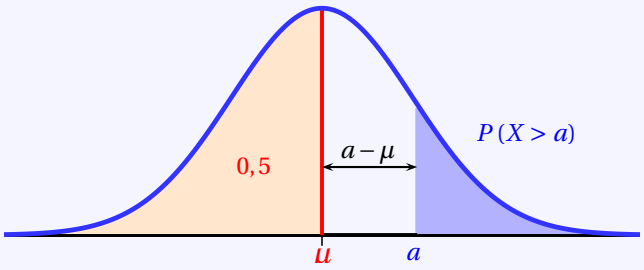
Propriété 1 ($P(X > a)$; $a > \mu$)

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ alors on a :

$$P(X < \mu) = 0,5 = P(X > \mu)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

$$\boxed{P(X > a) = 0,5 - P(\mu < X < a)}$$



X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu = 3 ; \sigma^2 = 2^2)$ alors on a en appliquant la propriété 1 avec $a = 5 > \mu = 3$ on a :

$$\boxed{P(X > 5) = 0,5 - P(3 < X < 5) \approx 0,16}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$0,5 - \text{TIStat.normFDR}(3,5,3,2) \approx 0,15865526$$

La bonne réponse est la : réponse 2b.

Question 3 (Réponse d)

3. Dans une ville donnée, pour estimer le pourcentage de personnes ayant une voiture rouge, on effectue un sondage. L'amplitude de l'intervalle de confiance au seuil de 0,95 étant inférieure ou égale à 0,04 la taille de l'échantillon choisi est :

a. 400 **b.** 1 000 **c.** 2 000 **d.** 2 500

Théorème 1 (Intervalle de confiance)

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p.

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & nf \geq 5 \\ \checkmark & n(1-f) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% de la proportion p est :

$$I_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Donc l'amplitude de l'intervalle de confiance est de :

$$f + \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(f - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Donc

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < 0,04 \iff \sqrt{n} > \frac{2}{0,04} = 50 \iff n > 50^2 = 2500$$

©ISSN 2272-5318

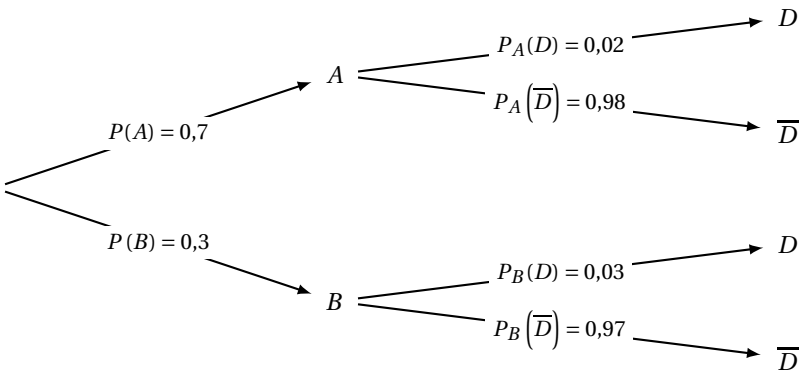
La bonne réponse est la : réponse 3d.

Question 4 (Réponse d)

4. Une entreprise vendant des parquets flottants s'approvisionne auprès de deux fournisseurs A et B. Le fournisseur A livre 70 % du stock de l'entreprise. On sait que 2 % des pièces livrées par A présentent un défaut et 3 % des pièces livrées par B présentent un défaut.
On prélève au hasard une pièce du stock de l'entreprise, quelle est la probabilité, que cette pièce soit sans défaut ?

a. 0,023 **b.** 0,05 **c.** 0,97 **d.** 0,977

On appelle A l'événement « la pièce a été livrée par le fournisseur A » , B l'événement « la pièce a été livrée par le fournisseur B » et D l'événement « la pièce présente un défaut ». On a l'arbre de probabilité suivant :



Les évènements A et B formant une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P\left(\overline{D}\right) = P\left(\overline{D} \cap A\right) + P\left(\overline{D} \cap B\right)$$
$$P\left(\overline{D}\right) = P(A) \times P_A\left(\overline{D}\right) + P(B) \times P_B\left(\overline{D}\right)$$
$$P\left(\overline{D}\right) = 0{,}7 \times 0{,}98 + 0{,}3 \times 0{,}97$$
$$P\left(\overline{D}\right) = 0{,}686 + 0{,}291$$
$$P\left(\overline{D}\right) = \underline{0{,}977}$$

La bonne réponse est la : réponse 4d.

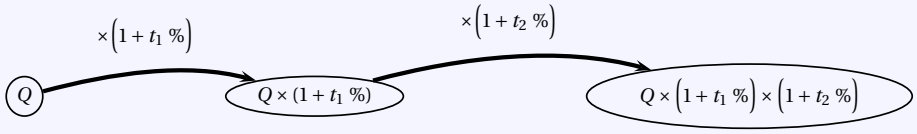
Question 5 (Réponse c)

5. Pour une puissance électrique donnée, le tarif réglementé du kilowattheure est passé de 0,114 0 € au 01/07/2007 à 0,137 2 € au 01/07/2014.
Cette augmentation correspond à un taux d'évolution arrondi au centième, chaque année, de :

a. 1,72 % **b.** 1,67 % **c.** 2,68 % **d.** 1,33 %

Propriété 2

Si une quantité Q qui subit une évolution relative (hausse ou baisse) d'un taux de t_1 % suivie d'un autre évolution relative d'un taux de t_2 %,
alors cette quantité Q est multipliée par le coefficient $\left(1+t_1\ \%\right)\times\left(1+t_2\ \%\right)$.



Dans l'exercice, le taux équivalent est donné pour une période de 7 ans. Donc ici on cherche le taux t tel que :

$$0,1140\times\left(1+\frac{t}{100}\right)^7=0,1372\iff\left(1+\frac{t}{100}\right)^7=\frac{0,1372}{0,1140}$$

On peut tester les valeurs proposées, c'est plus simple. Sinon, voici comment trouver le taux.

On compose alors par la fonction ln définie sur $]0;+\infty[$

$$0,1140\times\left(1+\frac{t}{100}\right)^7=0,1372\iff\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)^7=\ln\frac{0,1372}{0,1140}$$

Puis on applique alors la propriété $\ln a^n=n\ln a$ définie pour $a>0$ et n entier :

$$0,1140\times\left(1+\frac{t}{100}\right)^7=0,1372\iff 7\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)=\ln\frac{0,1372}{0,1140}$$

On divise le tout par 7 puis on compose par la fonction exponentielle :

$$0,1140\times\left(1+\frac{t}{100}\right)^7=0,1372\iff 1+\frac{t}{100}=\mathrm{e}^{\frac{1}{7}\times\ln\frac{0,1372}{0,1140}}$$

D'où

$$\boxed{t=100\times\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{7}\times\ln\frac{0,1372}{0,1140}}-1\right)\approx 2,6816}$$

Remarque : On peut, et c'est bien plus rapide, passer par la puissance $\frac{1}{7}$ *mais ce n'est pas au programme.*

La bonne réponse est la : réponse 5c.

©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Obligatoire Es et Spé. L : Suites — 5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Valentine place un capital c_0 dans une banque le 1er janvier 2014 au taux annuel de 2 %. À la fin de chaque année les intérêts sont ajoutés au capital, mais les frais de gestion s'élèvent à 25 € par an. On note c_n la valeur du capital au 1er janvier de l'année $2014+n$.

Partie A

On considère l'algorithme ci-dessous :

Initialisation
Affecter à N la valeur 0
Traitement
Saisir une valeur pour C
    Tant que $C < 2000$ faire
        Affecter à N la valeur $N+1$
        Affecter à C la valeur $1,02C-25$
    Fin Tant que
Sortie
Afficher N

1. 1. a. On saisit la valeur 1 900 pour C. Pour cette valeur de C, recopier le tableau ci-dessous et le compléter, en suivant pas à pas l'algorithme précédent et en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.
En arrondissant les valeurs affichées au centièmes on obtient :

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C	1900	1913	1926,26	1939,79	1953,58	1967,65	1982,01	1996,65	2011,58
Test $C<2000$	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	non

1. b. Quel est le résultat affiché par l'algorithme ? Dans le contexte de l'exercice, interpréter ce résultat.
Le résultat affiché est donc $N=8$ ce qui correspond dans le contexte de l'exercice au nombres d'années nécessaires pour que le capital dépasse les 2 000 euros, c'est à dire en 2022.

2. Que se passerait-il si on affectait la valeur 1 250 à C ?
Si on affectait la valeur 1 250 à C alors

$$1,02\times C-25 = 1,02\times 1250-25 = 1250$$

L'algorithme tournerait indéfiniment car la variable C serait toujours égale à 1 250.
Le capital serait de 1 250 euros tous les ans, car les intérêts couvrent juste les frais de gestion.

Partie B

Valentine a placé 1 900 € à la banque au 1er janvier 2014. On a donc $c_0 = 1900$.

1. Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, on a : $c_{n+1} = 1,02c_n - 25$.
Pour avoir le capital de l'année $2014+(n+1)$, soit c_{n+1} on augmente le capital de l'année précédente de 2%, ce qui revient à multiplier c_n par 1,02 auquel retire les 25 euros de frais. De ce fait :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ c_{n+1}=1,02c_n-25}$$

©ISSN 2272-5318

2. Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = c_n - 1250$.

2. a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

Les suites (c_n) et (u_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(c_n) : \begin{cases} c_0 &= 1900 \\ c_{n+1} &= 1{,}02 \times c_n - 25 \end{cases} \quad \Big| \quad (u_n) : \begin{cases} u_0 & \\ u_n &= c_n - 1250 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= c_{n+1} - 1250 \\ u_{n+1} &= (1{,}02\ c_n - 25) - 1250 \\ u_{n+1} &= 1{,}02 \times c_n - 1275 \\ u_{n+1} &= 1{,}02 \times \left(c_n + \frac{-1275}{1{,}02}\right) \\ u_{n+1} &= 1{,}02 \times (c_n - 1250) \\ u_{n+1} &= 1{,}02 \times u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$, et de premier terme $u_0 = 650$ puisque :

$$\begin{aligned} u_0 &= c_0 - 1250 \\ u_0 &= 1900 - 1250 \\ u_0 &= 650 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(u_n) : \begin{cases} u_0 &= 650 \\ u_{n+1} &= 1{,}02 \times u_n \end{cases} ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. b. Soit n un nombre entier naturel ; exprimer u_n en fonction de n.

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1{,}02$, et de premier terme $u_0 = 650$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ;\ u_n = u_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ u_n = 650 \times (1{,}02)^n}$$

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $c_n = 650 \times 1{,}02^n + 1250$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$u_n = c_n - 1250$$

On peut en déduire l'expression :

$$c_n = u_n + 1250$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ c_n = 650 \times (1{,}02)^n + 1250}$$

3. Montrer que la suite (c_n) est croissante.

On vient de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} ;\ 650 \times 1{,}02^n + 1250$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} ;\ c_{n+1} - c_n &= \left(650 \times 1{,}02^{n+1} + 1250\right) - \left(650 \times 1{,}02^n + 1250\right) \\ c_{n+1} - c_n &= 650 \times 1{,}02^{n+1} - 650 \times 1{,}02^{n+1} + (1250 - 1250) \\ c_{n+1} - c_n &= 650 \times 1{,}02^n \times (1{,}02 - 1) \\ c_{n+1} - c_n &= 650 \times 1{,}02^n \times 0{,}02 > 0 \end{aligned}$$

De ce fait, la suite (c_n) est croissante strictement.

©ISSN 2272-5318

4. Déterminer, par la méthode de votre choix, le nombre d'années nécessaires pour que le capital dépasse 2 100 €.

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ 650 \times 1,02^n + 1250$$

La question laisse le choix de calculer les valeurs ou de résoudre une inéquation.

Méthode 1 : Résolution d'une inéquation.
Pour tout entier naturels n :

$$\begin{aligned} c_n = 650 \times 1,02^n + 1250 > 2100 &\iff 650 \times 1,02^n > 850 \\ &\iff 1,02^n > \frac{850}{650} = \frac{17}{13} \end{aligned}$$

En composant par la fonction ln définie et croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$c_n = 650 \times 1,02^n + 1250 > 2100 \iff \ln 1,02^n > \ln \frac{17}{13}$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$c_n = 650 \times 1,02^n + 1250 > 2100 \iff n \ln 1,02 > \ln \frac{17}{13}$$

En divisant chaque membre par $\ln 1,02 > 00$, l'ordre ne change pas et :

$$c_n = 650 \times 1,02^n + 1250 > 2100 \iff n > \frac{\ln \frac{17}{13}}{\ln 1,02} \approx 13,55$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 14.

$$\boxed{S = \{14\,;\,15\,;\,16\,;\,\cdots\}}$$

Le nombre d'années nécessaires pour que le capital dépasse 2 100 € est donc de 14 ans.

Méthode 2 : Calculs de valeurs.
On peut reprendre les calculs de la partie A.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
c_n	1900	1913	1926,26	1939,79	1953,58	1967,65	1982,01	1996,65	2011,58
Test $c_n < 2100$	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui

Valeur de n	9	10	11	12	13	14	15	16
Valeur de c_n	2026,81	2 042,35	2 058,19	2 074,36	2 090,84	2 107,66	2 124,81	2 142,31
Test $c_n < 2100$	oui	oui	oui	oui	oui	non	non	non

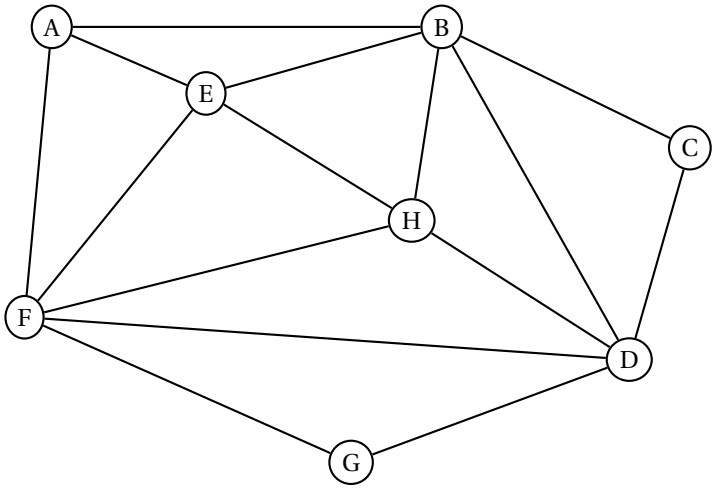
Attention pour conclure il faut justifier.
La suite (c_n) est croissante avec $c_{13} \approx 2090,84 < 2100$ et $c_{14} \approx 2107,66 > 2100$.
De ce fait, le nombre d'années nécessaires pour que le capital dépasse 2 100 € est de 14 ans.

©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Spécialité : Graphes — 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

La coopérative LAFRUITIERE collecte le lait de 7 exploitations de montagne. La situation géographique est représentée par le graphe ci-dessous, noté G_L. La coopérative est située au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations ; les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations.



Partie A

1.

1. a. Le graphe G_L est-il complet ? Justifier.

Définition 1 (Graphe Simple et Complet)

- Un *graphe simple* est un graphe sans boucle dont chaque couple de sommets est relié par au plus une arête.
- Un graphe simple est dit *complet* si tous les sommets sont adjacents, c'est-à-dire s'il existe toujours une (et une seule) arête entre deux sommets disjoints.

Le graphe G_L n'est pas complet car par exemple les sommets A et G ne sont pas reliés par une arête.

1. b. Le graphe G_L est-il connexe ? Justifier.

Définition 2 (Graphe connexe)

Un graphe est dit **connexe** si quels que soient les sommets u et v, il existe une chaîne de u vers v. C'est-à-dire, s'il existe une suite d'arêtes permettant d'atteindre v à partir de u.

Dans le graphe proposé, il existe une chaîne entre chacun des sommets par conséquent le graphe G_L est connexe.

2. Est-il possible d'organiser une tournée de toutes les exploitations en partant de A et en terminant en A et en passant au moins une fois par chaque client, tout en empruntant une fois et une seule chaque route ? Justifier la réponse.
Citons le théorème d'Euler

©ISSN 2272-5318

Théorème 2 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

- Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
- Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	3	5	2	5	4	5	2	4

Donc *4 sommets sont de degré impair*, les sommets A, B, D et F. Par conséquent, d'après le théorème 2, ce graphe connexe n'admet pas de *cycle eulérien*, (et pas de *chaine eulérienne*, ni non plus).
Il n'est pas possible d'organiser une tournée de toutes les exploitations en partant de A et en terminant en A et en passant au moins une fois par chaque client, tout en empruntant une fois et une seule chaque route .

3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe G_L (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).

On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 7 & 8 & 11 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 7 & 13 & 12 & 8 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 13 & 7 & 8 & 8 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 8 & 12 & 5 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 13 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & 4 & 12 & 11 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à H. Indiquer ces chemins.

Définition 3 (Matrice d'adjacence d'un graphe)

Considérons un graphe G (orienté), d'ordre n. On numérote les sommets de G de 1 à n. On appelle matrice d'adjacence associée à G la matrice M dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes (orientées) allant du sommet i vers le sommet j.

Propriété 3 (Matrice d'adjacence et nombre de chaînes)

Si M est la matrice d'adjacence associée à un graphe orienté dont les sommets sont numérotés et p désigne un nombre entier naturel.
Le terme a_{ij} (ligne i et colonne j) de la matrice M^p donne le nombre de chaînes de longueur p reliant i à j.

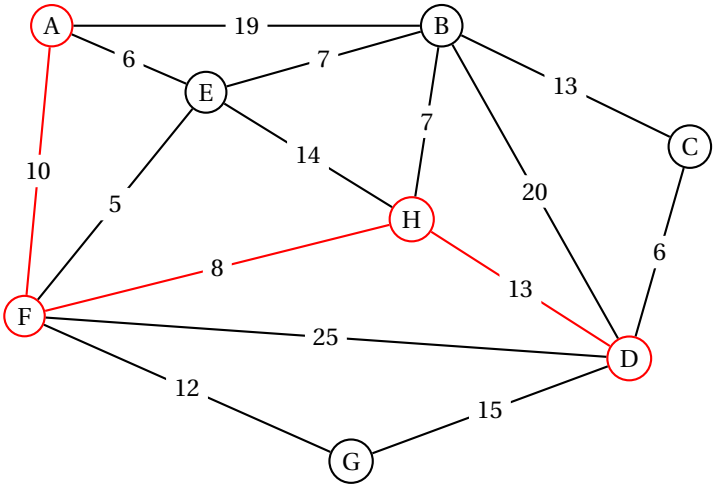
Le terme $a_{18} = 6$ de la matrice M^3 donnera donc nombre d'arêtes allant du sommet 1 soit A vers le sommet 8n soit H.
Il y a 6 chemins de longueur 3 reliant A à H. qui sont :

$$\boxed{AFEH - ABEH - AEFH - AEBH - ABDH - AFDH}$$

©ISSN 2272-5318

Partie B

Les arêtes sont pondérées par les distances entre les exploitations, exprimées en kilomètres. La coopérative doit collecter du lait provenant de l'exploitation D ; quel est le plus court parcours pour se rendre de A à D ? Justifier.



Pour cela appliquons l'algorithme de Dijkstra.
Remarque : L'algorithme porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002), et a été publié en 1959.

de .. à	à B	à C	à D	à E	à F	à G	à H
A	19A	∞	∞	**6A**	10A	∞	∞
E(6A)	~~19A~~ 13E	∞	∞	-	**10A**	∞	20E
F(10A)	**13E**	∞	35F	-	-	22F	18F
B(13E)	-	26B	33B	-	-	22F	**18F**
H(18F)	-	26B	31H	-	-	**22F**	-
G(22F)	-	**26B**	31H	-	-	-	-
C(26B)	-	-	**31H**	-	-	-	-
D(31H)	-	-	-	-	-	-	-

Le chemin le plus court pour relier A à D est de longueur 31 km :

$$A \xrightarrow{10} F \xrightarrow{8} H \xrightarrow{13} D$$

Exercice 3. — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;10]$ par : $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x+1}$.
Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f(x) := x + \exp(-x+1)$
	// Interprète f // Succès lors de la compilation f
	$x \longmapsto x + \exp(-x+1)$
2	derive $(f(x))$
	$-\exp(-x+1)+1$
3	solve $(-\exp(-x+1)+1>0)$
	$[x>1]$
4	derive $(-\exp(-x+1)+1)$
	$\exp(-x+1)$

1. Étude des variations de la fonction f

1. a. En s'appuyant sur les résultats ci-dessus, déterminer les variations de f puis dresser son tableau de variation.

La ligne 2 du logiciel nous donne la dérivée de f qui s'exprime sous la forme :

$$\forall x \in [0\,;10]\ ;\ f'(x) = -\exp(-x+1)+1$$

- On a pour tout réel $x \in [0\,;10]$:

$$f'(x) = 0 \iff -\exp(-x+1)+1 = 0$$
$$f'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^{-x+1} = 1$$
$$f'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^{-x+1} = \mathrm{e}^{0}$$

Par propriété de la fonction exponentielle (stricte croissance sur $\mathbb{R}$)

$$f'(x) = 0 \iff -x+1 = 0$$

soit

$$\forall x \in [0\,;10]\ ;\ \boxed{f'(x) = 0 \iff x = 1}$$

- En outre pour tout réel $x \in [0\,;10]$:
La ligne 3 du logiciel nous donne la résolution de l'inéquation

$$f'(x) > 0 \iff x > 1$$

En conséquence :

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \iff 10 \geq x > 1 \\ f'(x) = 0 \iff x = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow\ f'(x) < 0 \iff 0 \leq x < 1$$

La fonction f est donc croissante sur $[1\,;10]$ et décroissante sur $[0\,;1]$.

On peut alors dresser le tableau de variations de f avec les valeurs aux bornes :

x	0	1	10
$f(x)$	e	2	$10+\mathrm{e}^{-9} \approx 10$

©ISSN 2272-5318

x	0		1		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$\mathrm{e} \approx 2.7$	↘	2	↗	$10+\mathrm{e}^{-9} \approx 10$

1. b. En déduire que la fonction f admet un minimum dont on précisera la valeur.
Sur l'intervalle $[0;10]$ la fonction f admet donc un minimum en 1, qui vaut $f(1)=2$.

2. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 10].

Proposition 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur I.

Proposition 2 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est convexe si et seulement si **sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles**.
f est concave si et seulement si **sa dérivée seconde f'' est à valeurs négatives ou nulles**.

La fonction dérivée f' est dérivable sur $[0;10]$.
La ligne 4 du logiciel nous donne la dérivée seconde de f qui est strictement positive :

$$\forall x \in [0;10] \ ; \ f''(x) = \mathrm{e}^{-x+1} > 0$$

De ce fait, la propriété 2 implique que f soit convexe sur $[0;10]$.

Partie B

Le coût de revient est modélisé par la fonction f où *x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets* et $f(x)$ *le coût de revient exprimé en milliers d'euros.*

1. Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût de revient soit minimum ?
D'après la question **A1b.**, sur l'intervalle $[0;10]$ la fonction f admet un minimum en 1, qui vaut $f(1)=2$.
Le coût de revient est modélisé par la fonction f où *x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets* et $f(x)$ *le coût de revient exprimé en milliers d'euros* donc il faut produire 1 centaine d'objets soit 100 objets pour que le coût de revient soit minimal, égal à $1\,000 \times f(1) \approx 2\,000$€.

2. Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour x centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.

2. a. Justifier que le montant obtenu par la vente de x centaines d'objets est $1,2x$ milliers d'euros.
Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €donc la vente de x centaines d'objets rapporte $12x$ centaines d'euros soit $1,2x$ milliers d'euros.

2. b. Montrer que la marge brute pour x centaines d'objets, en milliers d'euros, est : $g(x) = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}$.
La marge brute pour x centaines d'objets, notée $g(x)$, en milliers d'euros, est donnée par la différence entre le montant obtenu par la vente de x centaines d'objets soit $1,2x$ milliers d'euros et le coût de revient est modélisé par la fonction f oùx est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et $f(x)$ le coût de revient exprimé en milliers d'euros.

$$\forall x \in [0;10] \ ; \ g(x) = 1,2x - f(x) = 1,2x - \left(x + \mathrm{e}^{-x+1}\right)$$

$$\boxed{\forall x \in [0;10] \ ; \ g(x) = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}}$$

©ISSN 2272-5318

2. c. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 10].

La fonction g est dérivable sur $[0;10]$ comme différence de fonctions qui le sont :

$$\forall x \in [0;10]\ ;\ g(x) = 1,2x - f(x)$$

Donc on a facilement la dérivée de g en utilisant la **partie A1a**.

$$\forall x \in [0;10]\ ;\ g'(x) = (1,2x)' - f'(x) = 1,2 + \mathrm{e}^{-x+1} - 1$$

$$\boxed{\forall x \in [0;10]\ ;\ g'(x) = 0,2 + \mathrm{e}^{-x+1}}$$

L'exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la dérivée d eg s'exprime donc comme la somme de deux termes strictement positifs sur $[0;10]$.

La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;10]$.

3. 3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 10].

On peut alors dresser le tableau de variations de g avec les valeurs aux bornes :

$$\forall x \in [0;10]\ ;\ g(x) = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}$$

x	0	10
$f(x)$	$-\mathrm{e} \approx -2.7$	$2 - \mathrm{e}^{-9} \approx 2$

x	0	α	10
Signe de $g'(x)$		+	
g	$-\mathrm{e} \approx -2.7$	0	$2 - \mathrm{e}^{-9} \approx 2$

Théorème 3 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

Application du corollaire :

- La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0;10]$;
- Le réel $k = 0$ est compris entre $g(0)$ et $g(10)$:

$$g(0) \approx -2,7 < 0 < g(10) \approx 2$$

Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,*
l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0;10]$.

3. b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01.

Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0,01$ on obtient : $\left\{ \begin{array}{lcl} g(1,94) & \approx & -0,0026 < 0 \\ g(1,95) & \approx & 0,00326 > 0 \end{array} \right.$, donc $\boxed{1,94 < \alpha < 1,95}$.

4. En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets.

On a vu lors de la question **B2b.** que la marge brute pour x centaines d'objets, en milliers d'euros, est : $g(x) = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}$.
L'étude menée lors de la question **B3.** nous permet d'obtenir le signe de g.

©ISSN 2272-5318

x	0	1.94	α	1.95	10
g		≈ -0.003	0	≈ 0.003	

On a donc :

x	0		α		10
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

Attention maintenant à ne pas conclure trop vite, la quantité d'objets est un nombre entier.

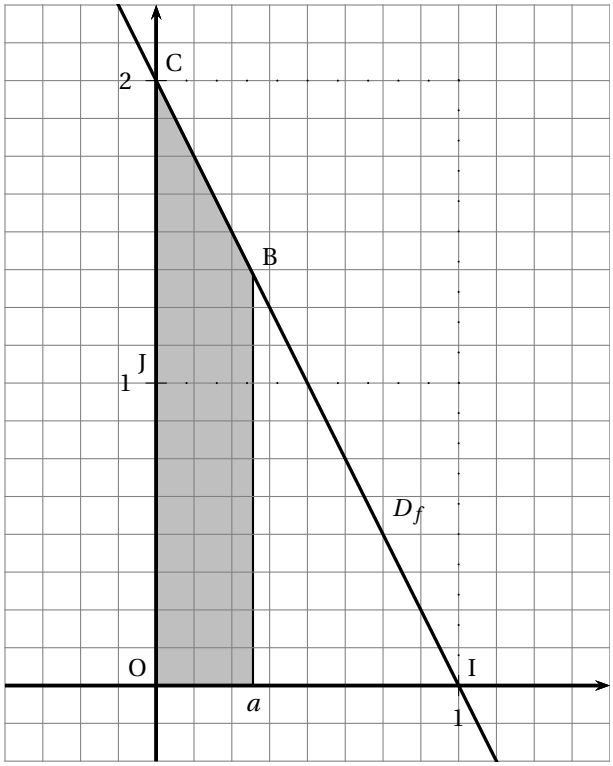
x	1,94	1,95
$f(x)$	$g(1,94) \approx -0,0026 < 0$	$g(1,95) \approx 0,00326 > 0$
Nombre d'objets	$1,94 \times 100 = 194$ mais marge brute négative	$1,95 \times 100 = 195$

La quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets est de 195 objets.

Exercice 3. Exercice 4. Exercice de recherche — 3 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par : $f(x) = 2 - 2x$.
On a tracé ci-dessous la droite D_f, représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.
Le point C a pour coordonnées $(0\,;2)$.
Δ est la partie du plan intérieure au triangle OIC.
Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1 ; on note A le point de coordonnées $(a\,;\,0)$ et B le point de D_f de coordonnées $(a\,;\,f(a))$.
Le but de cet exercice est de trouver la valeur de a, telle que le segment [AB] partage Δ en deux parties de même aire.
Déterminer la valeur exacte de a, puis une valeur approchée au centième.



- **Aire du triangle OIC : $\mathscr{A}_{OIC}$.**
  Le triangle OIC est rectangle en O. Son aire est donnée par le demi-produit des côtés de l'angle droit soit :

$$\boxed{\mathscr{A}_{OIC} = \frac{OI \times OC}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1 \text{ u.a.}}$$

- **Aire de la partie grisée : $\mathscr{A}$.**
  La partie grisée représente l'aire sous la courbe D_f comprise entre l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = a$ avec $a \in [0\,;1]$.

  – Montrons que f est positive sur l'intervalle $[0\,;1]$.

  La fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = 2 - 2x$ est positive sur cet intervalle.
  En effet :

$$0 \leq x \leq 1 \underset{\times(-2)}{\iff} 0 \geq -2x \geq -2 \underset{+2}{\iff} 1 \geq 2 - 2x \geq 0$$

  De ce fait

$$\boxed{\forall x \in [0\,;1]\ f(x) = 2 - 2x \geq 0}$$

  – La fonction f est *continue* sur $[0\,;a] \subseteq [0\,;1]$ donc intégrable et *positive* sur cet intervalle.
  Le réel a étant compris entre 0 et 1, l'aire de la partie grisée est donc l'intégrale entre 0 et a de f, exprimée en unité d'aire.

©ISSN 2272-5318

– Calcul de l'intégrale.
Une primitive de la fonction f est sur $[0;1]$ par exemple $x \mapsto 2x - x^2$, on a donc (en unité d'aire) pour tout réel a compris entre 0 et 1 :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathscr{A} &= \left[2x - x^2\right]_0^a \\ \mathscr{A} &= 2a - a^2\end{aligned}$$

L'aire de la partie grisée est donc :

$$\boxed{\mathscr{A} = \left(2a - a^2\right) \text{ u.a.}}$$

- **Calcul de a.**
On cherche la valeur de a, telle que le segment [AB] partage Δ en deux parties de même aire. On cherche donc a tel que l'aire du triangle OIC soit le double de l'aire de la partie grisée d'où :

$$2 \times \mathscr{A} = \mathscr{A}_{OIC} \Longleftrightarrow 2 \times \left(2a - a^2\right) = 1 \Longleftrightarrow -2a^2 + 4a - 1 = 0$$

C'est une équation polynôme du second degré de la forme $\alpha a^2 + \beta a + \gamma$ avec : $\alpha = -2$; $\beta = 4$; $\gamma = -1$. Le discriminent $\Delta = 8 > 0$ donc elle admet deux racines réelles. Il faut vérifier si elles appartiennent bien à l'intervalle $[0;1]$.

$$\Delta = 8 > 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \approx 1,71 \notin [0;1] \\ a_2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0,29 \in [0;1] \end{cases}$$

Sur l'intervalle $[0;1]$, l'unique solution est donc :

$$\boxed{a = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0,29}$$

©ISSN 2272-5318