Math93.com

Baccalauréat 2016 - ES/L Polynésie

Série ES/L Obli. et Spé.
10 juin 2016
Correction

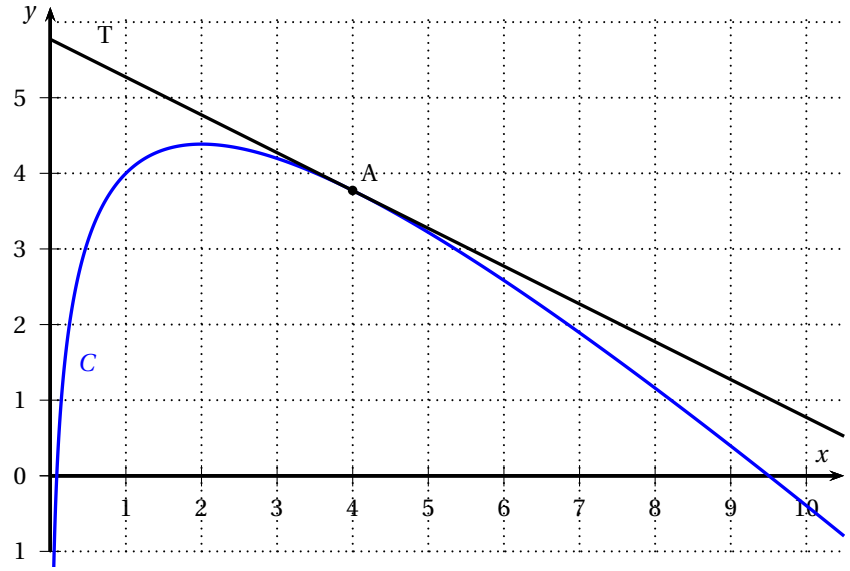
Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. QCM - Fonctions — 4 points

Commun à tous les candidats

Soit la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par : $f(x) = 5 - x + 2\ln x$. On a représenté ci-dessous la courbe représentative C de la fonction f, ainsi que T, la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 4.



Question 1 (Réponse c)

On note f' la fonction dérivée de f, on a :

a. $f'(x) = -1 + 2x$

b. $f'(x) = -2\ln x + (5-x)\dfrac{2}{x}$

c. $f'(x) = \dfrac{-x+2}{x}$

d. $f'(x) = 4 + \dfrac{2}{x}$.

Preuve.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 5 - x + 2\ln x \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$f'(x) = -1 + 2 \times \frac{1}{x} = \frac{-x+2}{x}$$

La réponse à la question 1 est la réponse c.

Question 2 (Réponse b)

Sur l'intervalle $]0\,;\,10]$, l'équation $f'(x)=0$ admet :

a. Aucune solution **b.** Une seule solution **c.** Deux solutions **d.** Plus de deux solutions

Preuve.

- **Méthode 1**.
  Sur l'intervalle $]0\,;\,10]$, la courbe représentative de la fonction f ne présente qu'une seule tangente horizontale en un point d'abscisse comprise entre 1 et 3. L'équation $f'(x)=0$ admet donc une unique solution sur cet intervalle.
- **Méthode 2**.
  Sur l'intervalle $]0\,;\,10]$, la question 1 a permis de déterminer la dérivée de f donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in]0\,;\,10]\;;\; f'(x)=0 &\iff \frac{-x+2}{x}=0\\ &\iff -x+2=0 \text{ et } x\in]0\,;\,10]\\ &\iff \underline{x=2}\end{aligned}$$

La réponse à la question 2 est la réponse b.

Question 3 (Réponse d)

Une équation de T est :

a. $y=\dfrac{1}{2}x+5,7$ **b.** $y=5,7x-\dfrac{1}{2}$

c. $y=-\dfrac{1}{2}x+1+2\ln 4$ **d.** $y=-\dfrac{1}{2}x+3+2\ln 4$

Preuve.
On rappelle que pour tout $x\in]0\,;\,10]$:

$$f(x)=5-x+2\ln x \text{ et } f'(x)=\frac{-x+2}{x}$$

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A\big(4\,;\,f(4)\big)$ est : T_4 : $y=f'(4)(x-4)+f(4)$

$$\left\{\begin{array}{ll} f(4) & =2\ln 4+1\\ f'(4) & =-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow T_4 : y=-\frac{1}{2}(x-4)+2\ln 4+1 \text{ soit } \boxed{T_4 : y=-\frac{1}{2}x+3+2\ln 4}$$

La réponse à la question 3 est la réponse d.

©ISSN 2272-5318

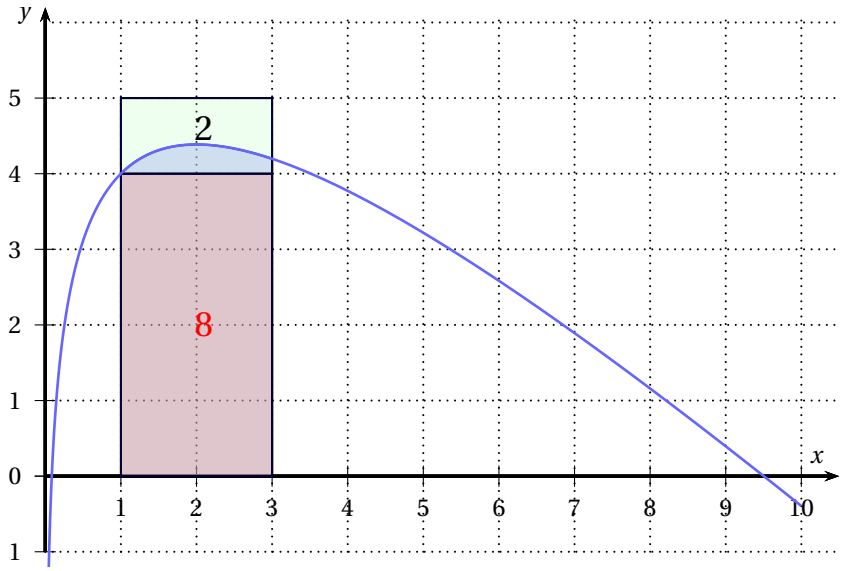
Question 4 (Réponse c)

La valeur de l'intégrale $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à l'intervalle :

a. [1 ; 3] **b.** [4 ; 5] **c.** [8 ; 9] **d.** [10 ; 15]

Preuve.

La fonction f étant positive entre 1 et 3, l'intégrale $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine compris entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = 3$.



L'aire considérée est sur le graphique clairement supérieure à 8 unités d'aire et inférieure à $10 = 8 + 2$ unités d'aire. La seule réponse possible parmi celles proposées est donc [8 ; 9].

La réponse à la question 4 est la réponse c.

©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Probabilités — 6 points

Commun à tous les candidats

Un fabricant produit des pneus de deux catégories, la catégorie « pneu neige » et la catégorie « pneu classique ». Sur chacun d'eux. On effectue des tests de qualité pour améliorer la sécurité. On dispose des informations suivantes sur le stock de production :

- le stock contient 40 % de pneus neige ; parmi les pneus neige, 92 % ont réussi les tests de qualité ; parmi les pneus classiques, 96 % ont réussi les tests de qualité.

Un client choisit un pneu au hasard dans le stock de production. On note :

- N l'évènement : « Le pneu choisi est un pneu neige » ; C l'évènement : « Le pneu choisi est un pneu classique » ; Q l'évènement : « Le pneu choisi a réussi les tests de qualité ».

Dans tout cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

Partie A

1. Illustrer la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

D'après les données de l'exercice :

- le stock contient 40 % de pneus neige donc

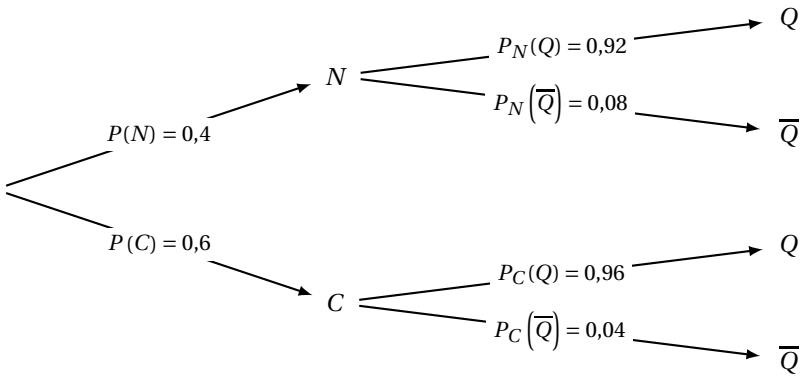
$$p(N) = 0,4 \text{ et } p(C) = 1 - 0,4 = 0,6$$

- parmi les pneus neige, 92 % ont réussi les tests de qualité donc :

$$p_N(Q) = 0,92 \text{ et } p_N\left(\overline{Q}\right) = 1 - 0,92 = 0,08$$

- parmi les pneus classiques, 96 % ont réussi les tests de qualité donc :

$$p_C(Q) = 0,96 \text{ et } p_C\left(\overline{Q}\right) = 1 - 0,96 = 0,04$$



2. Calculer la probabilité de l'évènement $N \cap Q$ et interpréter ce résultat par une phrase.

$$\boxed{p(N \cap Q) = p(N) \times p_N(Q) = 0,4 \times 0,92 = \underline{0,368}}$$

Cela signifie que 36,8% des pneus du stock de production sont des pneus neige ayant réussi les tests de qualité.

3. Montrer que $p(Q) = 0,944$.

On cherche $P(Q)$ or d'après la formule des probabilités totales :

$$P(Q) = P(Q \cap N) + P(Q \cap C)$$
$$P(Q) = P(N) \times P_N(Q) + P(C) \times P_C(Q)$$
$$P(Q) = 0,4 \times 0,92 + 0,6 \times 0,96$$
$$P(Q) = 0,368 + 0,576$$

Soit

$$\boxed{p(Q) = 0,944}$$

©ISSN 2272-5318

4. Sachant que le pneu choisi a réussi les tests de qualité, quelle est la probabilité que ce pneu soit un pneu neige ?

On cherche $p_Q(N)$ soit :

$$\boxed{p_Q(N) = \frac{p(Q \cap N)}{p(Q)} = \frac{0,368}{0,944} \approx \underline{0,390}}$$

Partie B

On appelle durée de vie d'un pneu la distance parcourue avant d'atteindre le témoin d'usure. On note X la variable aléatoire qui associe à chaque pneu classique sa durée de vie, exprimée en milliers de kilomètres. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

1. Quelle est la probabilité qu'un pneu classique ait une durée de vie inférieure à 25 milliers de kilomètres ?

La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 8$. On cherche alors $P(X < 25)$ or :

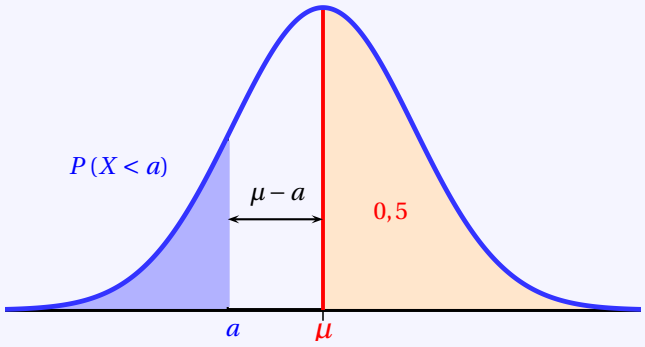
Propriété 1 ($P(X < a)$; $a < \mu$)

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ alors on a :

$$P(X < \mu) = 0,5 = P(X > \mu)$$

De plus pour tout réel a avec $a < \mu$:

$$\boxed{P(X < a) = 0,5 - P(a < X < \mu)}$$



On a donc facilement à l'aide de la calculatrice :

$$\boxed{P(X < 25) = 0,5 - P(25 < X < 30) \approx 0,266}$$

Calculatrice : Sur la TI Voyage 200

$$0,5 - \text{TIStat.normFDR}(25,30,30,8) \approx 0,265\,99$$

2. Déterminer la valeur du nombre d pour que, en probabilité, 20 % des pneus classiques aient une durée de vie supérieure à d kilomètres.

Attention car la variable aléatoire X est exprimée en milliers de kilomètres. On cherche donc d pour que

$$P\left(X > \frac{d}{1\,000}\right) = 0,2 \iff P\left(X < \frac{d}{1\,000}\right) = 0,8$$

On utilise la calculatrice pour obtenir la loi inverse. La calculatrice nous donne alors arrondi au millième :

$$\frac{d}{1\,000} \approx 36,73297 \Longrightarrow \boxed{d \approx 36\,733}$$

Calculatrice : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.invNorm}(0.8,30,8) \approx 36,732\,97$$

©ISSN 2272-5318

Partie C

Une enquête de satisfaction effectuée l'an dernier a révélé que 85 % des clients étaient satisfaits de la tenue de route des pneus du fabricant. Ce dernier souhaite vérifier si le niveau de satisfaction a été le même cette année. Pour cela, il décide d'interroger un échantillon de 900 *clients afin de conclure sur l'hypothèse d'un niveau de satisfaction maintenu. Parmi les* 900 *clients interrogés,* 735 *sont satisfaits de la tenue de route.*

Quelle va être la conclusion du directeur avec un niveau de confiance 0,95 ? Détailler les calculs, la démarche et l 'argumentation.

- **Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de* $n = 900$ *clients interrogés. Il est constaté que* 735 *d'entre eux sont satisfaits de la tenue de route.* ». Donc la fréquence observée de clients satisfaits est
$$f = 735 \div 900 \approx 0{,}816666666 \text{ soit } \boxed{f \approx 0{,}817}$$
  - Une enquête de satisfaction effectuée l'an dernier a révélé que $p = 85\,\%$ des clients étaient satisfaits de la tenue de route des pneus du fabricant.
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :
$$I_n = \left[p - 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 900$, $p = 85$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :
$$\begin{cases} \checkmark & n = 900 \geq 30 \\ \checkmark & np = 900 \times 0{,}85 = 765 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 900 \times 0{,}15 = 135 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :
$$I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0{,}85 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}85 \times 0{,}15}}{\sqrt{900}} \,;\, 0{,}85 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}85 \times 0{,}15}}{\sqrt{900}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}82667$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}826}$.
- $p + 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}87333$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}874}$.

$$\boxed{I_{900} \approx [0{,}826 \;;\; 0{,}874]}$$

- **Conclusion**
La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle, $f \approx 0{,}817 \notin I_{900}$ donc le directeur va donc conclure, au risque de 5% que la qualité de fabrication des pneus de cette année est moins bonne que celle de l'année précédente.

©ISSN 2272-5318

Exercice 3. Obligatoire - Suites — 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger. Lors de son ouverture, 500 films sont proposés et chaque mois, le nombre de films proposés aux abonnés augmente de 6 %.

Partie A

On modélise le nombre de films proposés par une suite géométrique (u_n) où n désigne le nombre de mois depuis l'ouverture du site. On a donc $u_0 = 500$.

1. Calculer u_1 et u_2 et donner le résultat arrondi à l'unité.

Chaque mois, le nombre de films proposés aux abonnés augmente de 6 %, donc le coefficient multiplicateur permettant de passer d'un terme au suivant est $(1+6\%) = 1,06$ soit :

$$\boxed{u_1 = 1,06 \times u_0 = \underline{530}} \text{ et } \boxed{u_2 = 1,06 \times u_1 = 561,8 \approx \underline{562}}$$

2. Exprimer u_n en fonction de n.

Chaque mois, le nombre de films proposés aux abonnés augmente de 6 %, donc le coefficient multiplicateur permettant de passer d'un terme au suivant est $(1+6\%) = 1,06$. La suite (u_n) est donc géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 1,06$. On a alors pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n = 500 \times 1,06^n}$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $q > 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

De ce fait, ici $q = 1,06 > 1$ et d'après le théorème 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} 1,06^n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 500 \times (1,06)^n = +\infty$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Partie B

Dans cette partie, on souhaite déterminer à partir de combien de mois le site aura doublé le nombre de films proposés par rapport au nombre de films proposés à l'ouverture.

1. On veut déterminer cette valeur à l'aide d'un algorithme. Recopier et compléter les lignes L3, L5 et L7 pour que l'algorithme donne le résultat attendu.

L1 :	**Initialisation**	Affecter à U la valeur 500
L2 :		Affecter à N la valeur 0
L3 :	**Traitement**	Tant que $U < 1\,000$
L4 :		Affecter à N la valeur $N+1$
L5 :		Affecter à U la valeur $1,06 \times U$
L6 :		Fin Tant que
L7 :	**Sortie**	Afficher N

©ISSN 2272-5318

2. On veut maintenant utiliser une méthode algébrique Calculer le nombre de mois recherché.

On souhaite déterminer à partir de combien de mois le site aura doublé le nombre de films proposés par rapport au nombre de films proposés à l'ouverture, cela revient donc à résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $u_n > 1\,000$.

Pour tout entier naturels n :

$$u_n = 500 \times 1,06^n > 1\,000 \iff 1,06^n > 2$$

En composant par la fonction $x \longmapsto \ln x$ définie et strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$500 \times 1,06^n > 1\,000 \iff \ln 1,06^n > \ln 2$$

On applique alors la propriété $\ln a^n = n \ln a$ définie pour $a > 0$ et n entier :

$$500 \times 1,06^n > 1\,000 \iff n \ln 1,06 > \ln 2$$

En divisant chaque membre par $\ln 1,06 > 0$, l'ordre est inchangé et :

$$500 \times 1,06^n > 1\,000 \iff n > \frac{\ln 2}{\ln 1,06} \approx 11,896$$

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 12.
Dans 12 mois, le nombre de films proposé aura plus que doublé, on peut le vérifier facilement :

- $u_{10} \approx 949$;
- $u_{11} \approx 1\,006 > 1\,000$.

Partie C

En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est 15 000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre des clients abonnés au site évolue suivant la règle suivante : chaque mois, 10 % des clients se désabonnent et 2 500 nouveaux abonnés sont enregistrés. On note v_n l'estimation du nombre d'abonnés n mois après l'ouverture, on a ainsi $v_0 = 15\,000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2\,500$.

Chaque mois, 10 % des clients se désabonnent donc le nombre de clients du moi précédent est multiplié par $1 - 10\% = 0,9$, et 2 500 nouveaux abonnés sont enregistrés. De ce fait, le nombre de clients $(n+1)$ mois après l'ouverture, s'obtient en multipliant le nombre de client du mois d'avant par 0,9 et en ajoutant 2 500.
Pour tout entier naturel n, on a alors :

$$\boxed{v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2\,500}$$

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 25\,000$.

2. a. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,9 et préciser son premier terme.

Les suites (v_n) et (w_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(v_n) : \begin{cases} v_0 = 15\,000 \\ v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2\,500 \end{cases} \quad \Big| \quad (w_n) : \begin{cases} w_0 \\ w_n = v_n - 25\,000 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - 25\,000 \\ w_{n+1} &= (0,9\ v_n + 2\,500) - 25\,000 \\ w_{n+1} &= 0,9 \times v_n - 22\,500 \\ w_{n+1} &= 0,9 \times \left(v_n + \frac{-22\,500}{0,9} \right) \\ w_{n+1} &= 0,9 \times (v_n - 25\,000) \\ w_{n+1} &= 0,9 \times w_n \end{aligned}$$

©ISSN 2272-5318

La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$, et de premier terme $w_0 = -10000$ puisque :

$$w_0 = v_0 - 25000$$
$$w_0 = 15000 - 25000$$
$$w_0 = -10000$$

Soit :

$$\boxed{(w_n) : \begin{cases} w_0 & = -10000 \\ w_{n+1} & = 0{,}9 \times w_n \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. b. En déduire que, pour tout entier n, $v_n = 25000 - 10000 \times 0{,}9^n$.

La suite (w_n) est géométrique de raison $q = 0{,}9$, et de premier terme $w_0 = -10000$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \ w_n = w_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; \ w_n = -10000 \times (0{,}9)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$w_n = v_n - 25000$$

On peut en déduire l'expression :

$$v_n = w_n + 25000$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; \ v_n = -10000 \times (0{,}9)^n + 25000}$$

2. c. Peut-on prévoir, à l'aide de ce modèle, une stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme ? Justifier la réponse.

Par théorème

Théorème 3

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

De ce fait, ici $-1 < q = 0{,}9 < 1$ et d'après le théorème 3 :

$$\lim_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} -10000 \times (0{,}9)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (v_n) :

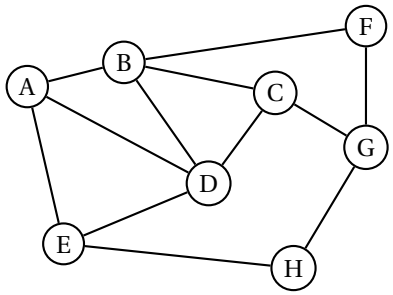
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = 25000}$$

On peut prévoir, à l'aide de ce modèle, une stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme à 25 000.

Exercice 3. Spécialité — 6 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H. Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens. Cette situation est représentée par le graphe Γ *ci-contre, dans lequel : les sommets représentent les aéroports, les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.*



Partie A

1. 1. a. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est complet.

Définition 1 (Graphe Simple et Complet)

- Un *graphe simple* est un graphe sans boucle dont chaque couple de sommets est relié par au plus une arête.
- Un graphe simple est dit *complet* si tous les sommets sont adjacents, c'est-à-dire s'il existe toujours une (et une seule) arête entre deux sommets disjoints.

Le graphe Γ est simple mais Γ n'est pas complet car par exemple les sommets A et C ne sont pas reliés par une arête.

1. b. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est connexe.

Définition 2 (Graphe connexe)

Un graphe est dit *connexe* si quels que soient les sommets u et v, il existe une chaîne de u vers v. C'est-à-dire, s'il existe une suite d'arêtes permettant d'atteindre v à partir de u.

Dans le graphe proposé, il existe une chaîne entre chacun des sommets par conséquent le graphe Γ est connexe.

2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.

Théorème 4 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

- Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
- Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	3	4	3	4	3	2	3	2

Donc 4 sommets sont de degré impair, les sommets A, C, E et G. Par conséquent, d'après le théorème 4 dit d'Euler-Hierholzer, ce graphe connexe Γ n'admet pas de chaine eulérienne.

©ISSN 2272-5318

3. Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ en respectant l'ordre alphabétique des sommets du graphe.

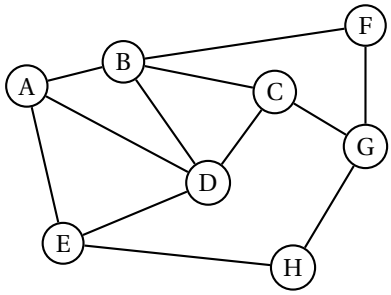
Définition 3 (Matrice d'adjacence d'un graphe)

Considérons un graphe G (orienté), d'ordre n. On numérote les sommets de G de 1 à n. On appelle matrice d'adjacence associée à G la matrice M dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes (orientées) allant du sommet i vers le sommet j.

On a donc ici par exemple :

- Pour i de 1 à 8, $a_{ii} = 0$ car il y a aucune boucle, le graphe est simple on l'a vu ;
- $a_{12} = 1$ car il y a une arête de A vers B ;
- $a_{13} = 0$ car il y a aucune arête de A vers C ;
- [...]
- $a_{87} = 1$ car il y a une arête de H vers G ;

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



4. Pour la suite de l'exercice, on donne les matrices suivantes :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & \boxed{0} \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 3 & 6 & 1 & \boxed{4} \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Un voyageur souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H.

4. a. Déterminer le nombre minimal de vols qu'il doit prendre. Justifier les réponses à l'aide des matrices données.

Propriété 2 (Matrice d'adjacence et nombre de chaînes)

Si M est la matrice associée à un graphe orienté dont les sommets sont numérotés et p désigne un nombre entier naturel. Le terme a_{ij} (ligne i et colonne j) de la matrice M^p donne le nombre de chaînes de longueur p reliant i à j.

- Dans la matrice M, le terme $(2,8)$ correspond au nombre de chaînes de longueurs 1 reliant le sommet B au sommet H. On peut noter ce terme $M_{(2,8)}$ et on vérifie bien que $M_{(2,8)} = 0$ puisqu'il n'y a pas de telle chaîne.
- Dans la matrice M^2 on a aussi $M^2_{(2,8)} = 0$, il n'y a pas de chaîne de longueur 2 reliant B à H.
- Dans la matrice M^3 on a $M^3_{(2,8)} = 4$, il y a 4 chaînes de longueur 3 reliant B à H.

Pour aller de l'aéroport B à l'aéroport H, le voyageur doit prendre un nombre minimal de 3 vols. Il y a 4 trajets possibles.

4. b. Donner tous les trajets possibles empruntant trois vols successifs.

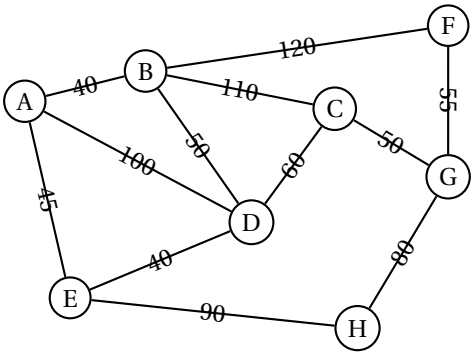
Le 4 trajets possibles sont :

$$\boxed{BAEH, BFGH, BCGH \text{ et } BDEH}$$

©ISSN 2272-5318

Partie B

Les arêtes sont maintenant pondérées par le coût de chaque vol, exprimé en euros. Un voyageur partant de l'aéroport A doit se rendre à l'aéroport G. En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet le moins cher.



Pour cela appliquons l'algorithme de Dijkstra.
Remarque : L'algorithme porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra (1930-2002), et a été publié en 1959.

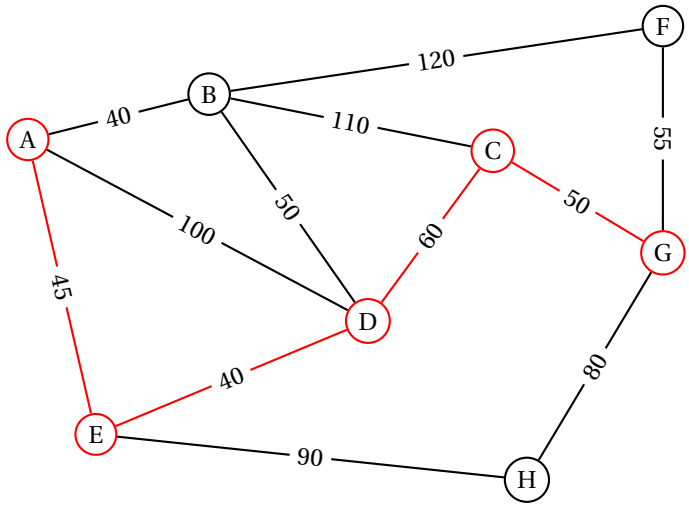
de .. à	à B	à C	à D	à E	à F	à G	à H
A	**40A**		100A	45A			
B(40A)	-	150B	90B	**45A**	160B		
E(45A)	-	150B	**85E**	-	160B		135E
D(85E)	-	145D	-	-	160B		**135E**
H(135E)	-	**145D**	-	-	160B	215H	-
C(145D)	-	-	-	-	**160B**	195C	-
F(160B)	-	-	-	-	-	**195C**	-

Le chemin le moins cher pour relier A à G est :

$$A \xrightarrow{45} E \xrightarrow{40} D \xrightarrow{60} C \xrightarrow{50} G$$

Son coût est donc de

$$45+40+60+50=195€$$



©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Fonctions — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;8]$ par :

$$f(x)=\frac{0,4}{20\mathrm{e}^{-x}+1}+0,4$$

1. Montrer que $f'(x)=\dfrac{8\mathrm{e}^{-x}}{(20\mathrm{e}^{-x}+1)^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}[0\,;\,8] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x)=0,4\times\dfrac{1}{20\mathrm{e}^{-x}+1}+0,4\end{array}\right.$$

La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,8]$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.

La fonction f est de la forme $0,4\times\dfrac{1}{v}+0,4$ donc de dérivée $0,4\times\dfrac{-v'}{v^2}$ avec :

$$\forall x\in[0\,;\,8]\;;\;f(x)=0,4\times\frac{1}{v(x)}+0,4\;:\;\left\{\begin{array}{ll}v(x) & =20\mathrm{e}^{-x}+1\\ v'(x) & =-20\mathrm{e}^{-x}\end{array}\right.$$

On a donc :

$$\boxed{\forall x\in[0\,;\,8],\;\;f'(x)=\frac{-v'(x)}{v(x)^2}=\frac{-0,4\times20\,\mathrm{e}^{-x}}{(20\mathrm{e}^{-x}+1)^2}=\frac{8\mathrm{e}^{-x}}{(20\mathrm{e}^{-x}+1)^2}}$$

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f'(x):8*\mathrm{e}\wedge(-x)/(20*\mathrm{e}\wedge(-x)+1)^2$ $\rightarrow f'(x):\dfrac{8\cdot\mathrm{e}^{-x}}{400\,(\mathrm{e}^{-x})^2+40\mathrm{e}^{-x}+1}$
2	$g(x):=$ Dérivée $[f'(x)]$ $\rightarrow g(x):=\dfrac{160\,(\mathrm{e}^{-x})^2-8\mathrm{e}^{-x}}{8000\,(\mathrm{e}^{-x})^3+1200\,(\mathrm{e}^{-x})^2+60\,(\mathrm{e}^{-x})+1}$
3	Factoriser $[g(x)]$ $\rightarrow 8\mathrm{e}^{-x}\cdot\dfrac{20\mathrm{e}^{-x}-1}{(20\mathrm{e}^{-x}+1)^3}$

©ISSN 2272-5318

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
En mathématiques, une fonction réelle d'une variable réelle est dite **convexe** (respectivement **concave**) si son graphe est « tourné vers le haut » ; c'est à dire que si A et B sont deux points du graphe de la fonction, le segment [AB] est entièrement situé au-dessus (respectivement au-dessous) du graphe. De plus on a les propriétés suivantes :

Proposition 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur I.

Proposition 2 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est convexe si et seulement si **sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles**.
f est concave si et seulement si **sa dérivée seconde f'' est à valeurs négatives ou nulles**.

D'après le logiciel de calcul formel on a sur $[0\,;\,8]$:

$$f''(x) = 8\mathrm{e}^{-x} \times \frac{20\mathrm{e}^{-x} - 1}{(20\mathrm{e}^{-x} + 1)^3}$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ de ce fait :

$$\forall x \in [0\,;\,8]\ ;\ \mathrm{e}^{-x} > 0 \Longrightarrow \begin{cases} 8\mathrm{e}^{-x} > 0 \\ (20\mathrm{e}^{-x} + 1)^3 > 0 \end{cases}$$

La dérivée seconde est donc du signe $20\,\mathrm{e}^{-x} - 1$ soit

- On a pour tout réel $x \in [0\,;\,8]$:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 20\,\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0$$
$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{20}$$

En composant par la fonction ln définie sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -\ln\frac{1}{20} = \ln 20$$

soit

$$\forall x \in [0\,;\,8]\ ;\ \boxed{f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \ln 20}$$

- En outre pour tout réel $x \in [0\,;\,8]$:

$$f''(x) < 0 \Longleftrightarrow 20\,\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$$
$$f''(x) < 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-x} < \frac{1}{20}$$

En composant par la fonction ln strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f''(x) < 0 \Longleftrightarrow -x < \ln\frac{1}{20} = -\ln 20$$

soit

$$\forall x \in [0\,;\,8]\ ;\ \boxed{f''(x) < 0 \Longleftrightarrow \ln 20 < x < 8}$$

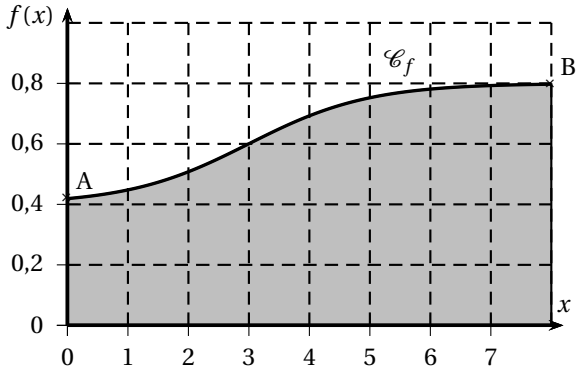
En conséquence :

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \Longleftrightarrow \ln 20 < x < 8 \\ f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \ln 20 \end{array}\right\} \Longrightarrow\ f''(x) > 0 \Longleftrightarrow 0 < x < \ln 20$$

On applique alors la proposition 2, f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles donc f est convexe sur $[0\,;\,\ln 20]$ car f'' est positive sur cet intervalle..

©ISSN 2272-5318

Partie B



Dans cet exercice, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point M est appelé « pente en M ». On précise aussi qu'une pente en M de 5 % correspond à un coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en M égal à $0,05$. Il est décidé que le projet sera accepté à condition qu'en aucun point de $\mathscr{C}_f$ la pente ne dépasse 12 %. **Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.**

Proposition 1 (Fausse)

L'altitude du village B est 0,6 km.

Preuve.
L'altitude du village B est :

$$f(8) = \frac{0,4}{20\mathrm{e}^{-8}+1} + 0,4 \approx 0,797 \neq 6$$

La proposition 1 est fausse.

Proposition 2 (Vraie)

L 'écart d'altitude entre les villages A et B est 378 mètres, valeur arrondie au mètre.

Preuve.
L'écart d'altitude entre les deux villages A et B est bien d'environ 378 mètres car :

$$\boxed{f(8) - f(0) \approx 0,378 \text{ km}}$$

La proposition 2 est vraie.

Proposition 3 (Vraie)

La pente en A vaut environ 1,8 %.

Preuve.
On a pour tout $x \in [0\,;\,8]$,

$$f'(x) = \frac{160\,(\mathrm{e}^{-x})^2 - 8\mathrm{e}^{-x}}{8000\,(\mathrm{e}^{-x})^3 + 1200\,(\mathrm{e}^{-x})^2 + 60\,(\mathrm{e}^{-x})^+ 1}$$

La pente en A est alors le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 soit :

$$f'(0) = \frac{8}{441} \approx 0,018$$

La proposition 3 est vraie.

Proposition 4 (Fausse)

Le projet de route ne sera pas accepté.

Preuve.
Le projet sera accepté à condition qu'en aucun point de $\mathscr{C}_f$ la pente ne dépasse 12 %, donc que pour tout x de $[0\,;\,8]$, $f'(x) < 0,12$.

©ISSN 2272-5318

On a montré dans la question **(A.2.)** que f est convexe sur $[0\,;\,\ln 20]$ et concave sur $[\ln 20\,;\,8]$. De ce fait, la pente maximale est atteinte au point d'abscisse $x = \ln 2$. Or :

$$f'(\ln 20) = \frac{160\left(e^{-\ln 2}\right)^2 - 8e^{-\ln 2}}{8000\left(e^{-\ln 2}\right)^3 + 1200\left(e^{-\ln 2}\right)^2 + 60\left(e^{-\ln 2}\right)^+ 1} = 0,10 < 0,12$$

la projet sera donc accepté et la proposition 4 est fausse.

©ISSN 2272-5318