Math93.com

Baccalauréat 2013 - ES/L Amérique du Nord

Série ES/L Spécialité
30 mai 2013
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. — 4 points

Commun à tous les candidats

QCM.

1. Pour tout réel a non nul, le nombre réel $e^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

a. $-e^{\frac{1}{a}}$ **b.** $\boxed{\dfrac{1}{e^{\frac{1}{a}}}}$ **c.** $\dfrac{1}{e^a}$ **d.** e^a

C'est une définition de l'inverse d'un réel b qui est $b^{-1}=\dfrac{1}{b}$ avec ici $b=e^{\frac{1}{a}}$ puisque $e^{-\frac{1}{a}}=\left(e^{\frac{1}{a}}\right)^{-1}$.

2. Pour tout réel a, le nombre réel $e^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

a. $\boxed{\sqrt{e^a}}$ **b.** $\dfrac{e^a}{2}$ **c.** $\dfrac{e^a}{e^2}$ **d.** $e^{\sqrt{a}}$

Encore une question de cours, pour x réel positif on a $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ par définition. On prend $x=e^a$ car $e^{\frac{a}{2}}=(e^a)^{\frac{1}{2}}$.

3. Pour tout réel $x<0$, le nombre réel $\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ est égal à :

a. $\ln(x)$ **b.** $\boxed{-\ln(-x)}$ **c.** $-\ln(x)$ **d.** $\dfrac{1}{\ln(-x)}$

On a $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ pour a et b strictement positifs donc ici :

$$\ln\left(-\frac{1}{x}\right)=\ln\left(\frac{1}{-x}\right)$$
$$\ln\left(-\frac{1}{x}\right)=\ln 1-\ln(-x)$$
$$\ln\left(-\frac{1}{x}\right)=-\ln(-x) \text{ car } \ln 1=0$$

Donc c'est la réponse b..

4. On donne la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x)$. La dérivée de f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

a. $f'(x)=1$ **b.** $f'(x)=\ln(x)$ **c.** $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ **d.** $\boxed{f'(x)=\ln(x)+1}$

f est de la forme uv avec $u(x)=x$, et $v(x)=\ln x$ donc $u'x)=1$, et $v'(x)=\dfrac{1}{x}$.
Sur $]0\,;+\infty[$, f est dérivable et

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$$

Exercice 2. — 5 points

Commun à tous les candidats

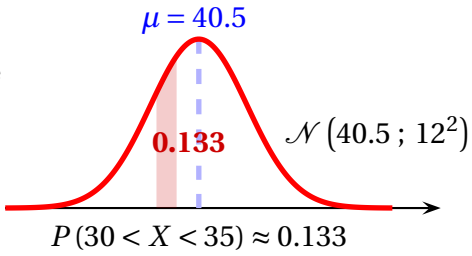
Dans cet exercice, les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1. *Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X, qui suit la loi normale de moyenne 40,5 et d'écart type 12.*

1. a. Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 40.5$ et d'écart-type $\sigma = 12$. La calculatrice nous donne à 10^{-3} près :

$$X \sim \mathcal{N}\left(40.5\,;\,12^2\right) \Longrightarrow P\,(30 < X < 35) \approx \underline{0{,}133}$$



Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*(30 , 35 , 40.5 , 12) ≈ $\underline{0{,}132\,570}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*(30 , 35 , 40.5 , 12) *ou (fr.) normalfrép*(30 , 35 , 40.5 , 12)
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* ⇒ *NormCD*(30 , 35, 12 , 40.5)

1. b. Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.

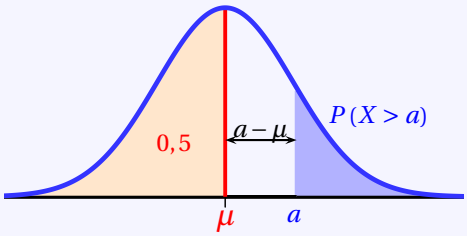
Propriété 1 ($P\,(X > a)$; $a > \mu$)

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(X < \mu\right) = 0{,}5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

$$\boxed{P\,(X > a) = 0{,}5 - P\left(\mu < X < a\right)}$$



On cherche ici $P\,(X \geq 55)$ or d'après la propriété on a :

$$P\,(X \geq 55) = 0{,}5 - P\,(40{,}5 < X < 55) \approx 0{,}113$$

la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans est d'environ $\underline{0{,}113}$.

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 :* $\left(0{,}5 - \textit{TIStat.normFDR}(40{,}5\,,\,55\,,\,40.5\,,\,12)\right) \approx \underline{0{,}113\,460}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*(40,5 , 55 , 40.5 , 12) *ou (fr.) normalfrép*(40,5 , 55 , 40.5 , 12)
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* ⇒ *NormCD*(40,5 , 55, 12 , 40.5)

©ISSN 2272-5318

2. Dans un slogan publicitaire, la banque affirme que 75 % des demandes de prêts immobiliers sont acceptées.

Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante, associe la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées.

2. a. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque.

On a $n = 1\,000$, $p = 75\%$ alors on sait que puisque $n = 1\,000 \geq 30$, $np = 750 \geq 5$ et $n(1-p) = 250 \geq 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence F est :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

soit $\boxed{I \approx [0{,}723\,16 \; ; \; 0{,}776\,83] \approx [72{,}3\% \; ; \; 77{,}7\%] \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

2. b. Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1 000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées. **Énoncer une règle de décision permettant de valider ou non le slogan publicitaire de la banque, au niveau de confiance 95 %.**

On va déterminer la valeur de la fréquence observée f sur un échantillon de taille $n = 1\,000$.

- Si f est dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence, on valide l'hypothèse au seuil 95% ;
- Sinon, on rejette au risque 5% l'hypothèse.

2. c. Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ?

Ici $f = \dfrac{600}{1000} = 60\%$ n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95%. Le slogan est visiblement infondé.

©ISSN 2272-5318

Exercice 3. 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.

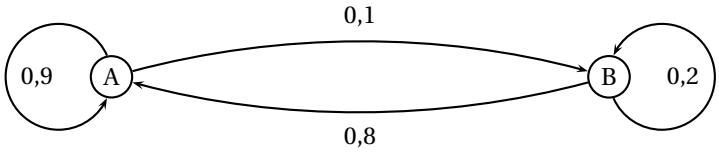
On considère que :

- Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,9.
- Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,8.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le n-ième jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le n-ième jour.
On a donc : $a_n + b_n = 1$.

Le 1er jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1 = 0$.

1. 1. a. Traduire les données par un graphe probabiliste.
En notant A l'évènement, "Léa se connecte le n-ième jour", et $B = \overline{A}$, l'évènement contraire, "Léa ne se connecte pas le n-ième jour" on a :



1. b. Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.
Notons, pour tout entier $n \geqslant 1$, P_n la matrice colonne $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
Alors la matrice de transition M qui vérifie $P_{n+1} = M \times P_n$ est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,8 \\ 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$$

1. c. Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.
On cherche donc a_3 qui nous est donnée après le calcul de M^2. En effet, on a de façon immédiate $P_{n+1} = MP_n = M^{n-1}P_1$, par analogie avec les suites numériques géométriques.
De ce fait, $P_3 = M^2 P_1 = \begin{pmatrix} 0,89 & 0,88 \\ 0,11 & 0,12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,88 \\ 0,12 \end{pmatrix}$
On a donc $\boxed{a_3 = 0,88 = 88\%}$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,8$.
On a vu que $P_{n+1} = MP_n$ soit $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = MP_n = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,8 \\ 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$
Et donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9a_n + 0,8b_n \\ 0,1a_n + 0,2b_n \end{pmatrix}$ soit $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,8b_n$
Or $b_{n+1} = 1 - a_{n+1}$
soit $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,8(1 - a_{n+1}) = 0,1a_n + 0,8$.

On a bien montré que : $\boxed{\forall n,\ n \geqslant 1, \text{ on a : } a_{n+1} = 0,1a_n + 0,8}$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = a_n - \dfrac{8}{9}$.

©ISSN 2272-5318

3. a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

$\forall n,\ n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{8}{9} \\ u_{n+1} &= 0,1a_n + 0,8 - \frac{8}{9} \\ u_{n+1} &= 0,1a_n - \frac{4}{45} \\ u_{n+1} &= 0,1\left(a_n + -\frac{8}{9}\right) \\ u_{n+1} &= 0,1u_n \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique, de raison $q = 0,1$ et de premier terme $u_1 = a_1 - \frac{8}{9} = -\frac{8}{9}$.

3. b. Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.

On a donc, $\forall n,\ n \geqslant 1$, $u_n = u_1 q^{n-1} = -\frac{8}{9} \times (0,1)^{n-1}$. Et donc puisque $u_n = a_n - \frac{8}{9}$, on a $a_n = u_n + \frac{8}{9}$,

Soit $\forall n,\ n \geqslant 1$, $\boxed{a_n = -\frac{8}{9} \times (0,1)^{n-1} + \frac{8}{9}}$

4. 4. a. Déterminer en justifiant la limite de (a_n).

On sait que si $-1 < q < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ et donc ici $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,1^n = 0$.

Donc, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{8}{9}}$.

4. b. Interpréter ce résultat.

a_n, la probabilité que Léa se connecte le n-ième jour tend donc vers $\frac{8}{9} \approx 88,89\%$

Exercice 4. — 6 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

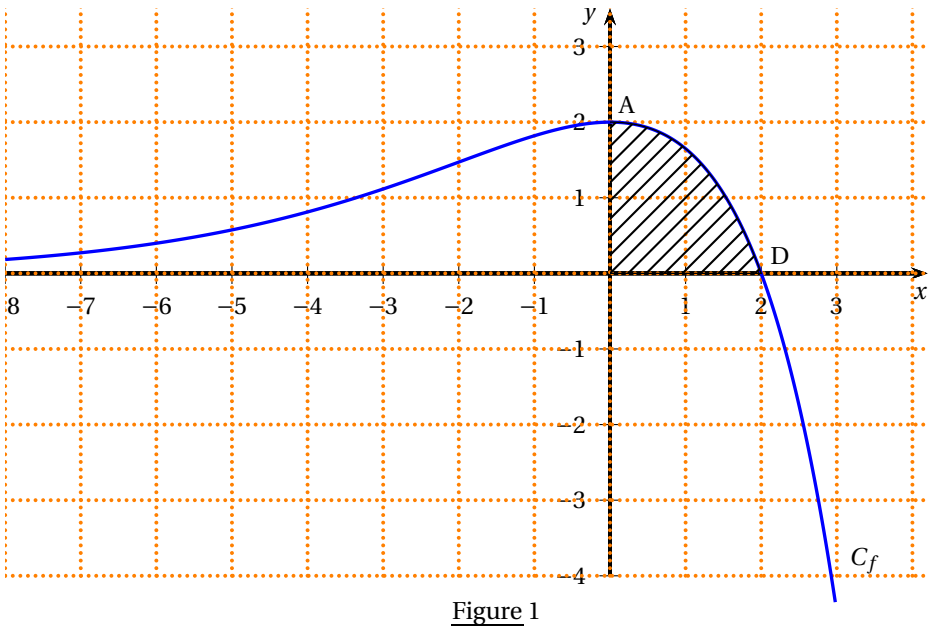


Figure 1

Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x)\mathrm{e}^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.
On sait que :

- Les points A(0 ; 2) et D(2 ; 0) appartiennent à la courbe C_f.
- La tangente à la courbe Cf au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

©ISSN 2272-5318

On note f' la fonction dérivée de f, définie sur $\mathbb{R}$.

1. **Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.**
   - Puisque le point D(2 ; 0) appartiennent à la courbe C_f on a $\boxed{f(2)=0}$;
   - La tangente à la courbe Cf au point A(0 ; 2) est parallèle à l'axe des abscisses, donc $\boxed{f'(0)=0}$.

2. **Calculer $f'(x)$.**
   La fonction f est de la forme uv avec $u(x)=b-x$ soit $u'(x)=-1$ et $v(x)=\mathrm{e}^{ax}$ soit $v'(x)=a\mathrm{e}^{ax}$.
   La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont et sa dérivée est donnée par $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=-1\times\mathrm{e}^{ax}+(b-x)\times a\mathrm{e}^{ax}$.
   Soit $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{f'(x)=(-ax-1+ab)\mathrm{e}^{ax}}$.

3. **En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :**

$$\begin{cases} b-2 &= 0\\ ab-1 &= 0\end{cases}$$

   On a vu que :
   - $f(2)=0$ or $f(x)=(b-x)\mathrm{e}^{ax}$ donc $(b-2)\mathrm{e}^{2a}=0$ et puisque $\mathrm{e}^{2a}>0$ on obtient $b-2=0$;
   - $f'(0)=0$ or $f'(x)=(-ax-1+ab)\mathrm{e}^{ax}$ donc $(-1+ab)\mathrm{e}^{0}=-1+ab=0$.

   De ce fait, les réels a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} b-2 &= 0\\ ab-1 &= 0\end{cases}$$

4. **Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.**
   La première équation du système nous donne $b=2$, puis, en remplaçant b par 2 dans la deuxième, on obtient $a=\dfrac{1}{2}$. L'expression de la fonction f est donc : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{f(x)=(2-x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}$.

Partie B

On admet que $f(x)=(-x+2)\mathrm{e}^{0,5x}$.

1. **À l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre 2 et 4.**
   La figure 1 nous montre :
   - D'une part que $f(x)$ est positif sur l'intervalle $[2\,;4]$,
     et donc que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la de la surface du plan délimitée par : la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites (verticales) d'équations $x=0$ et $x=2$;
   - D'autre part que $\forall x\in[0\,;\,2]$, $0\leq f(x)\leq 2$ et donc que l'aire recherchée est incluse dans un carré de côtés 2 unités et donc inférieure à 4 unités.
   - Pour finir, partie de la courbe Cf entre A et D est au dessus du segment [AD] et donc l'aire recherchée est supérieure à l'aire du triangle rectangle isocèle en O, OAD et donc supérieure à 2 unités d'aire.

   Pour conclure, $\boxed{2\leq\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\leq 4}$.

©ISSN 2272-5318

2. 2. a. On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x+8)\mathrm{e}^{0,5x}$.
Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
La fonction F est de la forme uv avec $u(x) - 2x + 8$ soit $u'(x) = -2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{0,5x}$ soit $v'(x) = 0,5\mathrm{e}^{0,5x}$.
La fonction F est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont et sa dérivée est donnée par $F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -2 \times \mathrm{e}^{0,5x} + (-2x+8) \times 0,5\mathrm{e}^{0,5x}$.
Soit après réduction, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{F'(x) = (2-x)\mathrm{e}^{ax} = f(x)}$, ce qui prouve que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. b. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0)$ avec $F(x) = (-2x+8)\mathrm{e}^{0,5x}$
$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = (-4+8)\mathrm{e}^1 - (0+8)\mathrm{e}^0$.
Soit $\boxed{\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{e}^1 - 8 \approx 2,87}$

©ISSN 2272-5318

3. On considère G une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$. Parmi les trois courbes C_1, C_2 et C_3 ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G. Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse.

- **Méthode 1** : Puisque G est une primitive de f on a $G'(x) = f(x)$ et donc $G'(0) = f(0) = 2$.
  La courbe de la fonction G doit donc présenter une tangente en $x = 0$ de coefficient directeur 2.
  - Cela élimine clairement C_1 dont le coefficient directeur de la tangente en $x = 0$ est négatif ;
  - Cela élimine aussi C_2 dont le coefficient directeur de la tangente en $x = 0$ semble bien supérieur à 2 ;
  - Seule, la courbe C_3 présente une tangente en $x = 0$ de coefficient directeur 2.

- **Méthode 2** : Pour avoir confirmation, on peut aussi faire le lien entre le signe de $G'(x)$ et celui de $f(x)$ puisque $G'(x) = f(x)$. On sait que $f(x)$ est positif sur $]-\infty\,;\,2]$ et négatif sur $[2;+\infty[$. Or, seule la fonction G de courbe C_3 est croissante sur $]-\infty;2]$ et décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

La courbe qui convient est donc la courbe C_3.

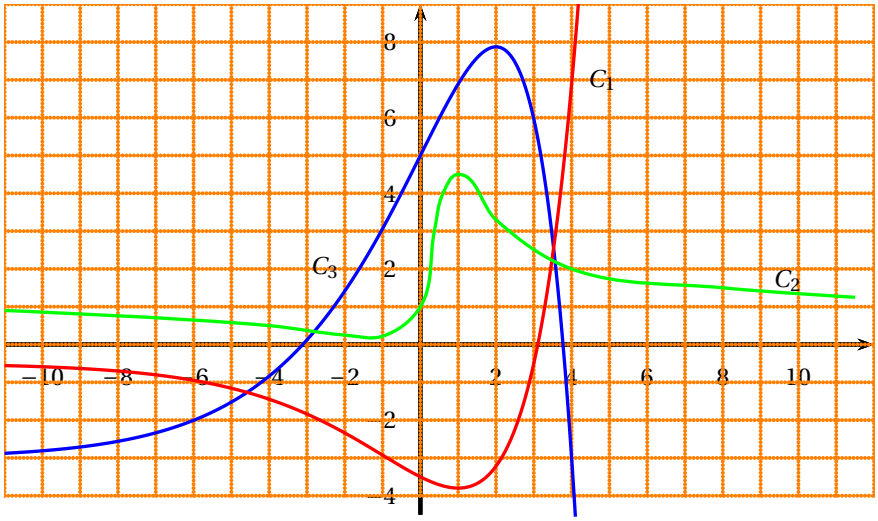


Figure 2

©ISSN 2272-5318