Baccalauréat 2026 - Spécialité Maths
Correction Amérique du Nord

Première Spé. Maths - 1er Juin 2026

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL - ÉPREUVE ANTICIPÉE DE PREMIÈRE

Mathématiques

Spécialité Mathématiques

Corrigé détaillé

Amérique du Nord – 1er Juin 2026

Première Spé. Maths

SESSION	DURÉE	BARÈME
2026	**2 heures**	**20 points**

Exercice	Thème principal	Points
Partie 1	Automatismes – QCM	6 points
Exercice 1	Probabilités : arbre pondéré, variable aléatoire et espérance	6 points
Exercice 2	Fonction, lecture graphique, suite géométrique et algorithme	4 points
Exercice 3	Fonction exponentielle, dérivation, variations et tangente horizontale	4 points
Total	**Sujet complet**	**20 points**

Bac 2026

Tous les sujets, corrigés, fichiers LaTeX et bilans de notions de la session 2026 sont disponibles sur la page mère :

Annales Bac Maths 2026 – sujets, corrigés, fichiers LaTeX et notions évaluées

Conseil : le jour de l'épreuve, il faut numéroter clairement les questions, justifier chaque réponse, soigner les calculs et encadrer les résultats importants.

Partie 1 Automatismes – QCM — 6 points

Corrigé

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Réponse	B	B	D	C	B	C	B	C	B

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question.
Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse.

Question 1

Le nombre

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\times 4$$

est égal à :

a) 8 b) $\frac{13}{2}$ c) 4 d) $\frac{16}{8}$

Corrigé

On respecte les priorités opératoires :

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\times 4=\frac{1}{2}+\frac{12}{2}=\frac{13}{2}.$$

$$\boxed{\text{Réponse b) } \frac{13}{2}}$$

Question 2

Le volume de la partie visible d'un iceberg est d'environ $10\,\%$ de son volume total.
Si la partie visible d'un iceberg est de 150 km^3, quel sera le volume total de cet iceberg ?

a) 1350 km^3 b) 1500 km^3 c) 15 km^3 d) 135 km^3

Corrigé

Soit V le volume total de l'iceberg. La partie visible représente $10\,\%$ du volume total, donc :

$$0,1V=150 \iff V=\frac{150}{0,1} \iff V=1500.$$

Le volume total est donc 1500 km^3.

$$\boxed{\text{Réponse b) } 1500 \text{ km}^3}$$

Question 3

Le prix d'un article est multiplié par $0,845$. Cela signifie que le prix de cet article a :

a) augmenté de $84,5\,\%$

b) baissé de $1,55\,\%$

c) augmenté de $15,5\,\%$

d) baissé de $15,5\,\%$

Corrigé

On a :

$$0,845 = 1 - 0,155.$$

Multiplier par $0,845$ revient donc à appliquer une baisse de $15,5\,\%$.

$$\boxed{\text{Réponse d) baissé de } 15,5\,\%}$$

Question 4

On considère la fonction A définie pour tout réel x par :

$$A(x) = (x+5)(x+8).$$

Le tableau de signes de $A(x)$ sur $\mathbb{R}$ est :

a)

x	$-\infty$		-8		-5		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		-8		-5		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		5		8		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Corrigé

On cherche les valeurs qui annulent chaque facteur :

$$x+5=0 \iff x=-5 \qquad \text{et} \qquad x+8=0 \iff x=-8.$$

Les racines de A sont donc -8 et -5.
Comme

$$A(x) = (x+5)(x+8),$$

le produit est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les deux racines :

x	$-\infty$		-8		-5		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{Réponse c)}}$$

Question 5

Un singe choisit une lettre au hasard parmi les lettres de l'alphabet.
On note les événements :

- V : « Le singe choisit une voyelle. »
- M : « Le singe choisit une des lettres du mot SINGE. »

Rappel : l'alphabet est constitué de 26 lettres dont les voyelles sont :

$$A,\ E,\ I,\ O,\ U,\ Y.$$

On note $P_M(V)$ la probabilité que le singe choisisse une voyelle sachant qu'il a choisi une lettre du mot SINGE.
On peut alors affirmer que $P_M(V)$ vaut :

a) $\dfrac{6}{26}$ b) $\dfrac{2}{5}$ c) $\dfrac{2}{6}$ d) $\dfrac{5}{6}$

Corrigé

Sachant que le singe a choisi une lettre du mot SINGE, l'univers est formé des 5 lettres :

$$S,\ I,\ N,\ G,\ E.$$

Parmi ces lettres, les voyelles sont I et E. Il y a donc 2 voyelles parmi 5 lettres.

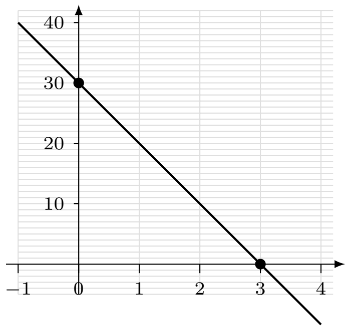
Ainsi :

$$P_M(V) = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\text{Réponse b) } \frac{2}{5}}$$

Question 6

Soit f une fonction affine, dont on a tracé la représentation graphique dans le repère ci-contre.



Une expression algébrique de f est :

a) $f(x) = -x + 30$

b) $f(x) = 30x + 3$

c) $f(x) = -10x + 30$

d) $f(x) = -\frac{1}{10}x + 30$

Corrigé

La droite est la représentation graphique d'un fonction affine f de la forme

$$f(x) = mx + p$$

D'après le graphique, la droite passe par les points $(0; 30)$ et $(3; 0)$.
Son coefficient directeur vaut :

$$m = \frac{0-30}{3-0} = \frac{-30}{3} = -10.$$

Comme l'ordonnée à l'origine vaut 30, une expression de f est :

$$f(x) = -10x + 30.$$

$\boxed{\text{Réponse c) } f(x) = -10x + 30}$

Question 7

La forme développée et réduite de l'expression

$$(x+2)^2 - (1-x)^2$$

vaut :

a) $2x^2+3$ b) $6x+3$ c) $2x+5$ d) $2x^2+2x+3$

Corrigé

$$\begin{aligned}(x+2)^2-(1-x)^2 &= x^2+4x+4-\left(1-2x+x^2\right)\\ &= x^2+4x+4-1+2x-x^2\\ &= 6x+3.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Réponse b) } 6x+3}$

Question 8

L'équation

$$2(x-4)-(2x+1)=0$$

admet :

a) Deux solutions : 4 et $\frac{1}{2}$

b) Deux solutions : 4 et $-\frac{1}{2}$

c) Aucune solution

d) Une infinité de solutions

Corrigé

$$\begin{aligned}2(x-4)-(2x+1)=0 &\iff 2x-8-2x-1=0\\ &\iff -9=0.\end{aligned}$$

Cette égalité est impossible. L'équation n'admet donc aucune solution.

$\boxed{\text{Réponse c) Aucune solution}}$

Question 9

On considère le nombre réel :

$$E=\frac{2\times 3^2}{27\times 2^3}.$$

On peut affirmer que E est égal à :

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{12}$ c) 12 d) $\frac{1}{6}$

©ISSN 2272-5318

Corrigé

On utilise $27 = 3^3$:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{2\times 3^2}{27\times 2^3}\\
&= \frac{2\times 3^2}{3^3\times 2^3}\\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2^2}\\
E &= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Réponse b) } \frac{1}{12}}$$

Partie 2 — 14 points

Exercice 1. Probabilités : arbre pondéré, variable aléatoire et espérance — 6 points

Durant une fête foraine, une urne contient dix boules. Chaque boule est soit verte, soit rouge, indiscernable au toucher.
Un jeu est proposé aux personnes présentes à la fête foraine. Pour y participer le joueur doit d'abord payer 1 euro.
Ensuite,

- le joueur tire une première boule qu'il donne au forain, celui-ci note sa couleur puis remet la boule dans l'urne ;
- le joueur tire une deuxième boule, le forain note la couleur de ce deuxième tirage et remet à nouveau la boule dans l'urne.

Voici les récompenses qu'il obtient :

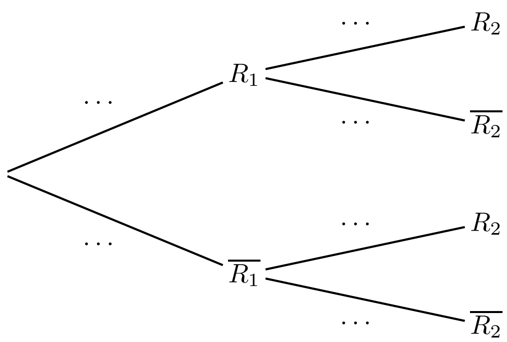
- si le joueur a tiré deux boules rouges, il reçoit 3 euros ;
- si le joueur a tiré deux boules vertes, il reçoit 1 euro ;
- sinon il ne reçoit pas d'argent.

Partie A

Dans cette partie, on considère que cette urne contient 1 boule rouge et 9 boules vertes.
On note :

- R_1 l'événement : « La première boule tirée est rouge. » ;
- R_2 l'événement : « La deuxième boule tirée est rouge. ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.



Corrigé

Arbre pondéré et tirage avec remise

Dans un arbre pondéré :

- la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin ;
- lorsqu'il y a remise, les probabilités du deuxième tirage sont les mêmes que celles du premier tirage.

L'urne contient 1 boule rouge et 9 boules vertes, soit 10 boules au total. Ainsi :

$$P(R_1) = \frac{1}{10} \qquad \text{et} \qquad P(\overline{R_1}) = \frac{9}{10}.$$

Comme la boule est remise dans l'urne après le premier tirage, la composition de l'urne est la même au deuxième tirage.

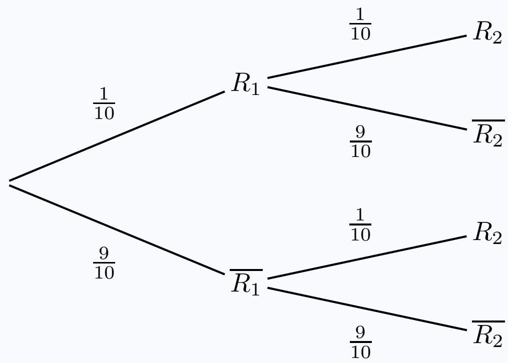
Donc :

$$P_{R_1}(R_2) = P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{1}{10}$$

et :

$$P_{R_1}(\overline{R_2}) = P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = \frac{9}{10}.$$

L'arbre complété est donc :



2. On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue après les deux tirages et les frais de participation au jeu de 1 euro.

2. a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

Corrigé

Le joueur paie 1 euro pour participer.

- S'il tire deux boules rouges, il reçoit 3 euros, donc son gain algébrique est :

$$3 - 1 = 2.$$

- S'il tire deux boules vertes, il reçoit 1 euro, donc son gain algébrique est :

$$1 - 1 = 0.$$

- Sinon, il ne reçoit rien, donc son gain algébrique est :

$$0 - 1 = -1.$$

Ainsi, la variable aléatoire X prend les valeurs :

$$\boxed{-1, \quad 0, \quad 2.}$$

2. b. Montrer que

$$P(X=-1)=\frac{18}{100}.$$

Corrigé

L'événement $\{X=-1\}$ correspond au cas où le joueur tire deux boules de couleurs différentes.
Il y a donc deux chemins possibles :

$$R_1\cap\overline{R_2}\qquad \text{ou}\qquad \overline{R_1}\cap R_2.$$

D'après l'arbre :

$$\begin{aligned}
P(X=-1)&=P(R_1\cap\overline{R_2})+P(\overline{R_1}\cap R_2)\\
&=P(R_1)\times P_{R_1}(\overline{R_2})+P(\overline{R_1})\times P_{\overline{R_1}}(R_2)\\
&=\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}\\
&=\frac{9}{100}+\frac{9}{100}\\
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X=-1)=\frac{18}{100}}$$

2. c. Recopier sur votre feuille et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X :

k			
$P(X=k)$			

Corrigé

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Donner la loi d'une variable aléatoire X, c'est donner toutes les valeurs k qu'elle peut prendre et les probabilités associées $P(X=k)$.
La somme de toutes les probabilités doit être égale à 1.

On a déjà :

$$P(X=-1)=\frac{18}{100}.$$

- L'événement $\{X=2\}$ correspond à deux boules rouges :

$$\begin{aligned}
P(X=2)&=P(R_1\cap R_2)\\
&=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X=2)=\frac{1}{100}}$$

- L'événement $\{X=0\}$ correspond à deux boules vertes :

$$\begin{aligned}
P(X=0)&=P(\overline{R_1}\cap\overline{R_2})\\
&=\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X=0)=\frac{81}{100}}$$

On obtient donc la loi de probabilité de X :

k	-1	0	2
$P(X=k)$	$\dfrac{18}{100}$	$\dfrac{81}{100}$	$\dfrac{1}{100}$

On vérifie :

$$\frac{18}{100}+\frac{81}{100}+\frac{1}{100}=1.$$

2. d. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.

Corrigé

Espérance d'une variable aléatoire

Si une variable aléatoire X prend les valeurs x_i avec les probabilités p_i, alors :

$$E(X)=\sum x_i p_i.$$

L'espérance s'interprète comme le gain moyen théorique sur un très grand nombre de répétitions.

D'après la loi de probabilité de X :

$$\begin{aligned} E(X) &= (-1)\times\frac{18}{100}+0\times\frac{81}{100}+2\times\frac{1}{100}\\ &= -\frac{18}{100}+\frac{2}{100}\\ &= -\frac{16}{100}\\ \boxed{E(X)} &\boxed{=-0,16} \end{aligned}$$

L'espérance du gain algébrique du joueur est négative.
Ainsi, sur un grand nombre de parties, le joueur perd en moyenne $0,16$ euro par partie.

$$\boxed{\text{Le jeu est favorable au forain.}}$$

Partie B

Dans cette partie, on considère que cette urne contient maintenant n boules rouges et $10 - n$ boules vertes où n est un nombre entier naturel avec $0 \leqslant n \leqslant 10$.
On note Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique après les deux tirages.

1. Démontrer que

$$E(Y) = \frac{4n^2 - 20n}{100}.$$

On expliquera la démarche mise en œuvre. Toute démarche, même incomplète, sera prise en compte dans la notation.

Corrigé

On généralise le raisonnement de la partie A.
L'urne contient n boules rouges et $10 - n$ boules vertes sur 10 boules au total. Ainsi :

$$P(R) = \frac{n}{10} \qquad \text{et} \qquad P(V) = \frac{10-n}{10}.$$

Comme les tirages se font avec remise, les deux tirages sont indépendants.

- **Probabilité de tirer deux boules rouges.**
  Dans ce cas, le joueur reçoit 3 euros et a payé 1 euro : son gain algébrique vaut 2.
  $$P(RR) = \frac{n}{10} \times \frac{n}{10} = \frac{n^2}{100}.$$
- **Probabilité de tirer deux boules vertes.**
  Dans ce cas, le joueur reçoit 1 euro et a payé 1 euro : son gain algébrique vaut 0.
  $$P(VV) = \frac{10-n}{10} \times \frac{10-n}{10} = \frac{(10-n)^2}{100}.$$
- **Probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes.**
  Dans ce cas, le joueur ne reçoit rien et a payé 1 euro : son gain algébrique vaut -1.
  Il y a deux ordres possibles :
  $$RV \qquad \text{ou} \qquad VR.$$
  Donc :
  $$\begin{aligned} P(\text{couleurs différentes}) &= 2 \times \frac{n}{10} \times \frac{10-n}{10} \\ &= \frac{2n(10-n)}{100}. \end{aligned}$$

La loi de probabilité de Y peut donc être résumée par :

Situation	RR	VV	couleurs différentes
Y	2	0	-1
Probabilité	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{(10-n)^2}{100}$	$\frac{2n(10-n)}{100}$

On calcule alors l'espérance :

$$\begin{aligned} E(Y) &= 2 \times \frac{n^2}{100} + 0 \times \frac{(10-n)^2}{100} + (-1) \times \frac{2n(10-n)}{100} \\ &= \frac{2n^2}{100} - \frac{2n(10-n)}{100} \\ &= \frac{2n^2 - 20n + 2n^2}{100} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{4n^2 - 20n}{100}}$$

2. Pour combien de boules rouges dans l'urne le jeu est-il équitable entre le joueur et le forain ?

Corrigé

Le jeu est équitable lorsque l'espérance du gain algébrique du joueur est nulle, c'est-à-dire lorsque :

$$E(Y) = 0.$$

On résout :

$$\begin{aligned} E(Y) = 0 &\iff \frac{4n^2 - 20n}{100} = 0 \\ &\iff 4n^2 - 20n = 0 \\ &\iff 4n(n-5) = 0 \\ &\iff n = 0 \quad \text{ou} \quad n = 5. \end{aligned}$$

Or l'énoncé précise que n est un entier naturel tel que :

$$0 \leqslant n \leqslant 10.$$

Les deux valeurs obtenues sont donc admissibles.

$$\boxed{\text{Le jeu est équitable pour } n = 0 \text{ ou } n = 5.}$$

Attention

La valeur $n = 0$ est bien autorisée par l'énoncé. Elle correspond à une urne ne contenant aucune boule rouge : le joueur tire alors toujours deux boules vertes, reçoit 1 euro et récupère exactement sa mise.
Si l'on imposait implicitement la présence d'au moins une boule rouge, alors seule la valeur $n = 5$ conviendrait.

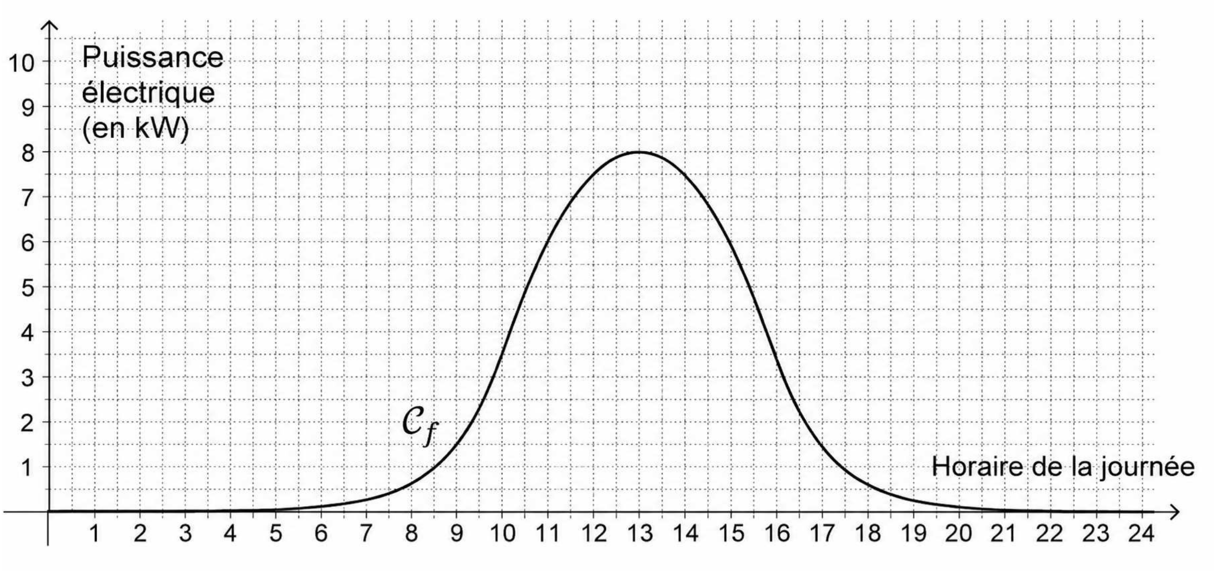
Exercice 2. Fonction, lecture graphique, suite géométrique et algorithme — 4 points

Pour réduire sa facture d'électricité, Camille a décidé de faire poser des panneaux solaires sur le toit de sa maison.
Elle souhaite analyser sa production et estimer le temps nécessaire pour rentabiliser cet investissement.

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie A

Lors d'une belle journée ensoleillée, la puissance électrique, en kilowatt (kW), des panneaux solaires de Camille peut être modélisée en fonction de l'heure par une fonction f.
On admet que f est définie sur $[0\ ;\ 24]$ et on donne sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ci-dessous.



Avec la précision permise par le graphique :

1. Donner la puissance électrique des panneaux solaires à 11h00.

Corrigé

On lit graphiquement l'image de 11 par la fonction f.
À l'abscisse 11, la courbe $\mathcal{C}_f$ a une ordonnée voisine de 6.
Ainsi :

$$f(11) \approx 6.$$

La puissance électrique des panneaux solaires à 11h00 est donc d'environ :

$$\boxed{6 \text{ kW.}}$$

2. Résoudre graphiquement l'inéquation

$$f(x) \geqslant 5$$

et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Corrigé

Résolution graphique d'une inéquation

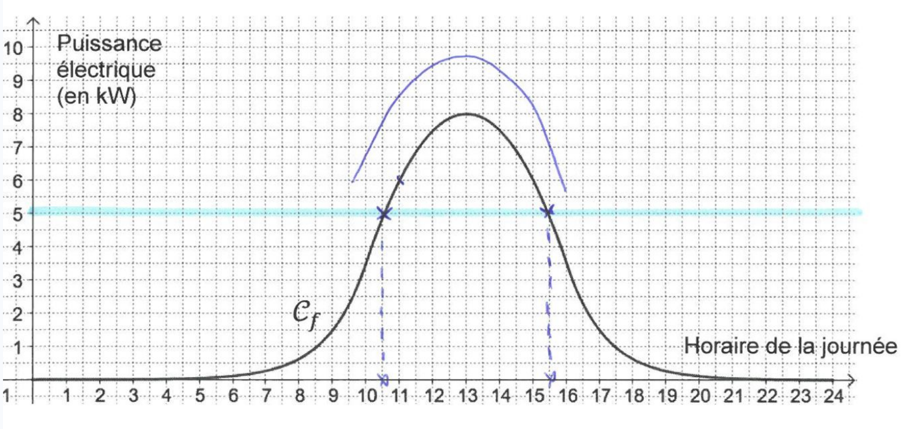
Résoudre graphiquement une inéquation du type

$$f(x) \geqslant k$$

revient à repérer les abscisses des points de la courbe situés au-dessus ou sur la droite horizontale d'équation

$$y = k.$$

On cherche les points de la courbe $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 5.



D'après le graphique, la droite horizontale d'équation $y = 5$ coupe la courbe $\mathcal{C}_f$ pour des abscisses environ égales à :

$$10{,}5 \qquad \text{et} \qquad 15{,}5.$$

La courbe est située au-dessus de la droite d'équation $y = 5$ entre ces deux valeurs.
Ainsi :

$$\boxed{f(x) \geqslant 5 \iff x \in [10{,}5\ ;\ 15{,}5].}$$

Dans le contexte de l'énoncé, cela signifie que la puissance électrique des panneaux solaires est au moins égale à 5 kW entre environ 10h30 et 15h30.
La durée correspondante est :

$$15{,}5 - 10{,}5 = 5.$$

Donc :

$$\boxed{\text{La production est d'au moins } 5 \text{ kW pendant environ } 5 \text{ heures.}}$$

Partie B

Le coût pour 1 kilowattheure (kWh) consommé au tarif réglementé était de $0,15$ euro en 2020.
On admet que ce tarif réglementé augmente de $6\,\%$ chaque année.
On note c_n le coût en euros pour 1 kWh consommé durant l'année $2020+n$, avec n un entier naturel.
On a alors :

$$c_0 = 0,15.$$

1. Déterminer la nature de la suite (c_n). On précisera sa raison.

Corrigé

Suite géométrique

Une suite (u_n) est géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = qu_n.$$

Le nombre q est appelé la raison de la suite.

Le tarif augmente de $6\,\%$ chaque année. Augmenter de $6\,\%$ revient à multiplier par :

$$1 + \frac{6}{100} = 1,06.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$c_{n+1} = 1,06c_n.$$

La suite (c_n) est donc une suite géométrique de raison :

$$\boxed{1,06.}$$

2. Pour tout entier naturel n, exprimer c_n en fonction de n.

Corrigé

Terme général d'une suite géométrique

Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors :

$$u_n = u_0q^n.$$

La suite (c_n) est géométrique de premier terme :

$$c_0 = 0,15$$

et de raison :

$$q = 1,06.$$

Donc, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{c_n = 0,15 \times 1,06^n.}$$

3. Donner le calcul permettant d'obtenir le coût pour 1 kWh consommé en 2030.
Il n'est pas demandé d'effectuer ce calcul.

Corrigé

L'année 2030 correspond à :

$$2030 = 2020 + 10.$$

Il faut donc calculer c_{10}.
D'après la formule explicite obtenue :

$$c_n = 0,15 \times 1,06^n.$$

Ainsi, le calcul permettant d'obtenir le coût pour 1 kWh consommé en 2030 est :

$$\boxed{c_{10} = 0,15 \times 1,06^{10}.}$$

4. On admet que, chaque année depuis 2020, l'utilisation des panneaux solaires de Camille lui a permis d'éviter l'achat de 2000 kWh par an.
L'installation des panneaux solaires en janvier 2020 a coûté à Camille 7000 euros.
On considère le programme Python ci-dessous.

```python
n = 0
c = 0.15
S = 0
while S < 7000:
    S = S + c*2000
    n = n + 1
    c = 1.06*c
print(n)
```

4. a. Dans le contexte de l'énoncé, que représentent les variables `c` et `S` du programme ?

Corrigé

Boucle `while`

Une boucle `while` répète un bloc d'instructions tant qu'une condition est vraie.
Ici, la condition est :

`S < 7000.`

La boucle s'arrête donc dès que la somme `S` atteint ou dépasse 7000.

Dans le programme :

- la variable `c` représente le coût, en euros, de 1 kWh pour l'année considérée ;
- la variable `S` représente le montant total, en euros, économisé par Camille depuis l'installation des panneaux solaires.

En effet, chaque année, Camille évite l'achat de 2000 kWh. Pour une année où le coût d'un kWh vaut `c`, l'économie réalisée vaut :

`c*2000.`

La ligne :

`S = S + c*2000`

ajoute donc l'économie annuelle au total déjà économisé.

Ainsi :

$\boxed{\begin{array}{l}\texttt{c} \text{ représente le coût du kWh pour l'année considérée ;} \\ \texttt{S} \text{ représente le total des économies réalisées.}\end{array}}$

4. b. On exécute le programme ci-dessus. Il affiche 16.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Corrigé

La boucle s'arrête dès que le total des économies réalisées atteint ou dépasse le coût d'installation des panneaux solaires, c'est-à-dire :

$$7000 \text{ euros.}$$

Le programme affiche :

$$16.$$

Cela signifie qu'il faut 16 années pour que les économies cumulées soient supérieures ou égales à 7000 euros.
Comme les panneaux solaires ont été installés en janvier 2020, cela correspond à :

$$2020 + 16 = 2036.$$

On peut donc interpréter le résultat ainsi :

$$\boxed{\text{Camille rentabilise son installation au bout de 16 ans, c'est-à-dire vers 2036.}}$$

Exercice 3. Fonction exponentielle, dérivation, variations et tangente horizontale — 4 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(4x-4)\,\mathrm{e}^{-0,5x}+5.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=(-2x+6)\,\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

Corrigé

Dérivation d'un produit et d'une exponentielle composée

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors :

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Si u est une fonction dérivable, alors :

$$(\mathrm{e}^{u})'=u'\,\mathrm{e}^{u}.$$

On écrit :

$$f(x)=(4x-4)\,\mathrm{e}^{-0,5x}+5.$$

On pose :

$$u(x)=4x-4 \qquad \text{et} \qquad v(x)=\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

Alors :

$$u'(x)=4.$$

De plus, avec $w(x)=-0,5x$, on a :

$$v(x)=\mathrm{e}^{w(x)} \qquad \text{et} \qquad w'(x)=-0,5.$$

Donc :

$$v'(x)=-0,5\,\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

Ainsi, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
f'(x)&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)+0\\
&=4\,\mathrm{e}^{-0,5x}+(4x-4)\left(-0,5\,\mathrm{e}^{-0,5x}\right)\\
&=\left(4-0,5(4x-4)\right)\,\mathrm{e}^{-0,5x}\\
&=(4-2x+2)\,\mathrm{e}^{-0,5x}\\
&=(-2x+6)\,\mathrm{e}^{-0,5x}.
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{f'(x)=(-2x+6)\,\mathrm{e}^{-0,5x}.}$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Signe de la dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x) < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

On a, pour tout réel x :

$$f'(x) = (-2x+6)\,\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

Or, pour tout réel x :

$$\mathrm{e}^{-0,5x} > 0.$$

Le signe de $f'(x)$ est donc le signe de $-2x+6$.
On résout :

$$-2x+6=0 \iff -2x=-6 \iff x=3.$$

Ainsi :

$$-2x+6>0 \iff x<3$$

et :

$$-2x+6<0 \iff x>3.$$

On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-2x+6$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{e}^{-0,5x}$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Ainsi :

$$f'(x) > 0 \text{ sur }]-\infty;3[\qquad \text{et} \qquad f'(x) < 0 \text{ sur }]3;+\infty[.$$

Calculons la valeur de f en 3 :

$$\begin{aligned} f(3) &= (4\times 3-4)\,\mathrm{e}^{-0,5\times 3}+5 \\ &= 8\,\mathrm{e}^{-1,5}+5 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(3) = 5+8\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}}$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	$5+8\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	

Ainsi, la fonction f est :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{strictement croissante sur }]-\infty ; 3], \\ \text{strictement décroissante sur } [3 ; +\infty[.\end{array}}$$

La fonction f admet donc un maximum en $x = 3$, égal à :

$$\boxed{5 + 8\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}}.$$

3. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des points pour lesquels la tangente est horizontale ?
Si oui, on précisera les coordonnées exactes de ces éventuels points.

Corrigé

Tangente horizontale

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est $f'(a)$.
La tangente est horizontale lorsque son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire lorsque :

$$f'(a) = 0.$$

On cherche donc les réels x tels que :

$$f'(x) = 0.$$

Or :

$$f'(x) = (-2x + 6)\,\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

Comme, pour tout réel x,

$$\mathrm{e}^{-0,5x} > 0,$$

on a :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff (-2x+6)\,\mathrm{e}^{-0,5x} = 0 \\ &\iff -2x + 6 = 0 \\ &\iff x = 3. \end{aligned}$$

Il existe donc un seul point de la courbe $\mathcal{C}_f$ pour lequel la tangente est horizontale.
Son ordonnée est :

$$f(3) = 5 + 8\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}.$$

Ainsi, le point recherché a pour coordonnées :

$$\boxed{\left(3\ ;\ 5 + 8\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right).}$$

$$\boxed{\text{Oui, la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse } 3.}$$

Fin du devoir