Math93.com

Baccalauréat 2017 - S Pondichéry

Série S Obli. et Spé.
26 Avril 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Probabilités — 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième. La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85%.

Partie A

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc. La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98 et la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

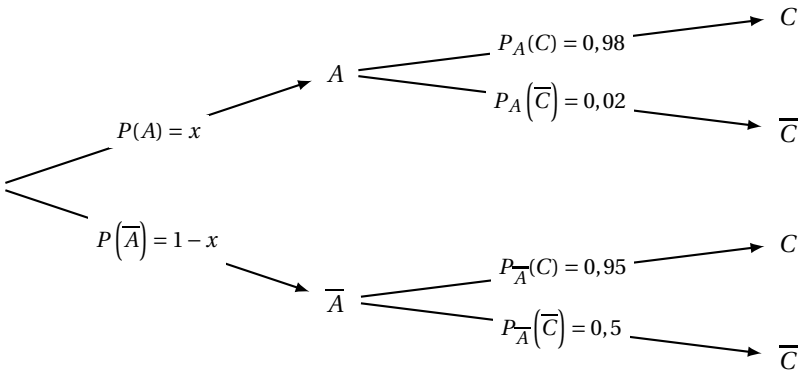
À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

- A l'évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ; C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0,03x + 0,95$.

Résumons les données dans un arbre en notant $\overline{A}$ l'évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication B » et $\overline{C}$ l'évènement : « la tablette de chocolat n'est pas commercialisable ».



Les évènements A et $\overline{A}$ formant une partition de l'univers on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap C) + P\left(\overline{A} \cap C\right) \\ &= 0,98 \times x + 0,95 \times (1 - x) \\ &= 0,98 \times x + 0,95 - 0,95x \\ P(C) &= \underline{0,03x + 0,95} \end{aligned}$$

2. À l'issue de la production, on constate que 96% des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable. Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

À l'issue de la production, on constate que 96% des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable donc $P(C) = 0,96$ et de ce fait :

$$P(C) = 0,96 \iff 0,03x + 0,95 = 0,96 \iff x = \frac{1}{3}$$

On a alors

$$\begin{cases} P(A) = x = \dfrac{1}{3} \\ P\left(\overline{A}\right) = 1 - x = \dfrac{2}{3} = 2 \times \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Donc $P\left(\overline{A}\right) = 2 \times P(A)$ ce qui montre que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.

Propriété 1

Soit λ un réel strictement positif.
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a et b tels que $0 \leq a \leq b$:

$$P(a \leq T \leq b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

et donc

$$P(T \leq b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P(T \geq a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

En outre la variable T est d'espérance : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

La durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ, donc d'espérance $E(Z) = \dfrac{1}{\lambda}$. Or la durée de vie moyenne (ou espérance) de ce type de machine est de 5 ans, on a donc :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = 5 \iff \lambda = \frac{1}{5} = \underline{0,2}$$

2. Calculer $P(Z > 2)$.

Puisque la variable Z suit une loi loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$ on a :

$$P(Z > 2) = \mathrm{e}^{-\lambda \times 2} = \mathrm{e}^{-0,4} \approx \underline{0,670}$$

3. Sachant que la machine a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

Propriété 2 (Durée de vie sans vieillissement)

Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h :

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$$

Cette propriété traduit le fait que la loi exponentielle est « sans mémoire ».

Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans est donnée par : $P_{X \geqslant 3}(X \geqslant 5)$. or d'après la propriété 2 dite « de durée de vie sans vieillissement » on a :

$$\begin{aligned} P_{X \geqslant 3}(X \geqslant 5) &= P_{X \geqslant 3}(X \geqslant 3 + 2) \\ &= P(X \geqslant 2) \\ P_{X \geqslant 3}(X \geqslant 5) &= \mathrm{e}^{-0,4} \approx \underline{0,670} \end{aligned}$$

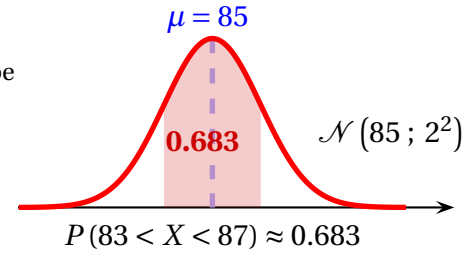
Partie C

On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100g de chocolat commercialisable. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. Calculer $P(83 \leq X \leq 87)$. Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2% du pourcentage annoncé sur l'emballage ?

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart-type $\sigma = 2$. La calculatrice nous donne à 10^{-3} près :

$$X \sim \mathcal{N}\left(85\,;\,2^2\right) \Longrightarrow P(83 < X < 87) \approx \underline{0{,}683}$$



Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*(83 , 87 , 85 , 2) $\approx \underline{0{,}682\,689}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*(83 , 87 , 85 , 2) *ou (fr.) normalfrép*(83 , 87 , 85 , 2)
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* ⇒ *NormCD*(83 , 87, 2 , 85)

Or X donne la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100g de chocolat commercialisable. Cette teneur en cacao est annoncée à 85% donc la probabilité que la teneur en cacao soit différente de moins de 2% du pourcentage annoncé sur l'emballage est donnée par :

$$P(85-2 \leq X \leq 85+2) = P(83 \leq X \leq 87) \approx 0{,}683$$

La probabilité cherchée, que la teneur en cacao soit différente de plus de 2% du pourcentage annoncé sur l'emballage est donc : $1 - P(83 \leq X \leq 87) \approx \underline{0{,}317}$.

2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que : $P(85-a \leq X \leq 85+a) = 0{,}9$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On cherche un réel a tel que :

$$P(85-a < X_1 < 85+a) = 0{,}9$$

Or on a en soustrayant par $\mu = 85$ chaque terme et en divisant par l'écart-type $\sigma = 2$:

$$P(85-a \leq X \leq 85+a) = 0{,}9 \Longleftrightarrow P\left(\frac{85-a-85}{2} < \frac{X-85}{2} < \frac{85+a-85}{2}\right) = 0{,}9$$

$$P(85-a \leq X \leq 85+a) = 0{,}9 \Longleftrightarrow P\left(-\frac{a}{2} < \frac{X-85}{2} < \frac{a}{2}\right) = 0{,}9$$

Or par définition :

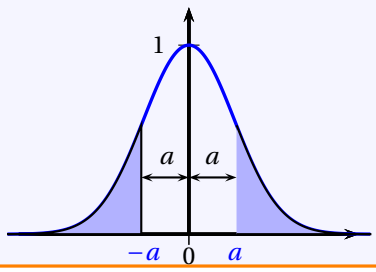
$$X \backsim \mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right) \Longleftrightarrow Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \backsim \mathcal{N}(0\,;\,1)$$

En outre :

Propriété 3

Soit X une v.a. qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

- La fonction Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\Phi(t) = P(X \leq t)$.
- Pour tout réel a on a :
  - (1) : $P(X \leq -a) = P(X \geq a)$
  - (2) : $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
  - (3) : $P(-a \leq X \leq a) = 2\Phi(a) - 1$



De ce fait, d'après le (3) de la propriété 3 :

$$P(85-a \leq X \leq 85+a) = 0{,}9 \Longleftrightarrow P\left(-\frac{a}{2} < Y < \frac{a}{2}\right) = 0{,}9 \quad \text{où } Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \backsim \mathcal{N}(0\,;\,1)$$

$$\Longleftrightarrow 2\Phi\left(\frac{a}{2}\right) - 1 = 0{,}9$$

$$\Longleftrightarrow \Phi\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95$$

©ISSN 2272-5318

La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-3} près :

$$\Phi\left(\frac{a}{2}\right) = 0,9 (\Longleftrightarrow \frac{a}{2} \approx 1,645 \Longleftrightarrow \underline{a \approx 3,290}$$

Conclusion : On vient de montrer que :

$$P(85 - a \leq X \leq 85 + a) = 0,9 \iff a \approx 3,29$$

Cela signifie donc que 90% des tablettes de chocolat commercialisable on une teneur en cacao comprise entre 81,71% et 88,29%.

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*(0.95 , 0 , 1) ≈ 1,644 854
- *Sur TI82/83+ : invNorm*(0.95 , 0 , 1) *ou (fr.) FracNormale*(0.95 , 0 , 1)
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN ⇒ InvNormCD*(0.95 , 1 , 0)

3. La chocolaterie vend un lot de 10 000 tablettes de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90% des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle [81,7 ; 88,3]. Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère. Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?

- **Analyse des données** :
  - « Sur un échantillon de $n = 550$ tablettes, il est constaté que 80 ne répondent pas au critère donc que 470 d'entre elles y répondent ». Donc la fréquence observée tablettes qui répondent au critère est
  $$f = 470 \div 550 \approx 0,854545454 \text{ soit } \underline{f \approx 0,855}$$
  - On veut tester l'hypothèse : « la proportion de tablettes qui répondent au critère est $\underline{p = 90\%}$ ».
- **Intervalle de fluctuation** :
  On a pour le cas étudié, $n = 550$, $p = 90$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :
  $$\begin{cases} \checkmark & n = 550 \geq 30 \\ \checkmark & np = 550 \times 0,9 = 495 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 550 \times 0,1 = 55 \geq 5 \end{cases}$$
  Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence f dans un échantillon de taille $n = 550$: est alors :
  $$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,9 - 1,96\ \frac{\sqrt{0,9 \times 0,1}}{\sqrt{550}} \ ; \ 0,9 + 1,96\ \frac{\sqrt{0,9 \times 0,1}}{\sqrt{550}} \right]$$
  Soit puisque les borne sont :
  - $p - 1,96\ \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,87493$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0,874}$.
  - $p + 1,96\ \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,92507$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0,926}$.

  $$\boxed{I_{550} \approx [0,874 \ ; \ 0,926]}$$
- **Conclusion**
  La fréquence observée $f \approx 0,855$ n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique I_{550}, donc le résultat du contrôle remet en question l'hypothèse, avec un risque d'erreur de 5%.

©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Complexes — 3 points

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère l'équation (E) : $z^2 - 6z + c = 0$, où c est un réel strictement supérieur à 9.

1. a. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

L'équation (E) est une équation du second degré de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -6 \\ c > 9 \end{array}\right. \Longrightarrow \Delta = 36 - 4c$$

Or

$$c > 9 \Longrightarrow -4c < -36 \Longrightarrow \Delta = 36 - 4c < 0$$

Le discriminant est donc strictement négatif, ce qui implique que l'équation (E) admet deux solutions complexes non réelles.

1. b. Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + \mathrm{i}\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - \mathrm{i}\sqrt{c-9}$.

Puisque le discriminant $\Delta = 36 - 4c < 0$ on a $-\Delta = 4c - 36 > 0$ et les solutions de l'équation sont les complexes conjugués définies par :

$$\left\{\begin{array}{l} z_A = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{6 + \mathrm{i}\sqrt{4(c-9)}}{2} = \underline{3 + \mathrm{i}\sqrt{c-9}} \\ z_B = \overline{z_A} = \underline{3 - \mathrm{i}\sqrt{c-9}} \end{array}\right.$$

2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B. Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

$$\left\{\begin{array}{l} OA = |z_A| = \sqrt{3^2 + (c-9)} = \sqrt{c} \\ OB = |z_B| = \left|\overline{z_A}\right| = \sqrt{c} \end{array}\right.$$

On a donc $OA = OB$ ce qui implique que le triangle OAB soit isocèle en O.

3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

Remarquons tout d'abord que si le triangle OAB est rectangle, c'est nécessairement en O car le triangle OAB est isocèle en O.

On a :

$$AB = |z_A - z_B| = \left|2\mathrm{i}\sqrt{c-9}\right| = 2\sqrt{(c-9)}$$

D'après le théorème de Pythagore et sa réciproque on a (avec $c > 9$) :

$$\begin{aligned} OAB \text{ rectangle en O} &\Longleftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2 \\ &\Longleftrightarrow 4(c-9) = 2c \\ &\Longleftrightarrow 2c = 36 \\ &\Longleftrightarrow \underline{c = 18} \end{aligned}$$

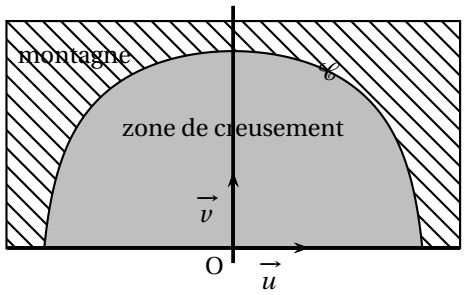
Il existe donc bien une seule valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et $c = 18$.

©ISSN 2272-5318

Exercice 3. Fonction — 4 points

Commun à tous les candidats

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne. Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.



On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5\ ;\ 2,5]$ par : $f(x) = \ln\left(-2x^2 + 13,5\right)$. L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-2,5\ ;\ 2,5]$.

La fonction f est définie et dérivable sur $[-2,5\ ;\ 2,5]$. Elle est de la forme $\ln u$ donc de dérivée $\dfrac{u'}{u}$ avec pour tout réel x de $[-2,5\ ;\ 2,5]$:

$$u(x) = -2x^2 + 13,5 \quad \Big| \quad u'(x) = -4x$$

Pour tout réel x de $[-2,5\ ;\ 2,5]$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \Longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-4x}{-2x^2 + 13,5}}$$

2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur $[-2,5\ ;\ 2,5]$. En déduire le signe de f sur $[-2,5\ ;\ 2,5]$.

On a admis que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-2,5\ ;\ 2,5]$ par : $f(x) = \ln\left(-2x^2 + 13,5\right)$, de ce fait, pour tout réel x de $[-2,5\ ;\ 2,5]$ on a : $2x^2 + 13,5 > 0$.
La dérivée est donc du signe du numérateur $-4x$ et l'on obtient facilement :

x	-2.5		0		2.5
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	↗	$\ln(13.5)$	↘	0

La fonction f est donc strictement positive sur l'intervalle $]-2,5\,;\,2,5[$ et nulle en $-2,5$ et $2,5$.

©ISSN 2272-5318

Partie B : Aire de la zone de creusement

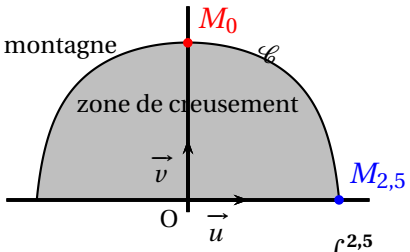
1. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un arc de cercle de centre 0 ? Justifier la réponse.

Soit M un point de la courbe $\mathscr{C}$, ses coordonnées sont donc : $M\big(x\,;\,f(x)\big)$. On est dans un repère orthonormal donc le calcul des distances est légitime avec les formules usuelles. On obtient donc :

$$OM_x = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$$
$$OM_x = \sqrt{x^2 + \big(\ln\left(-2x^2+13{,}5\right)\big)^2}$$

- Or pour $x = 0$, la hauteur du tunnel est : $OM_0 = \ln(13{,}5) \approx 2{,}6$;
- et pour $x = 2{,}5$, on a : $OM_{2{,}5} = 2{,}5 \neq \ln(13{,}5)$.

Conclusion : La courbe $\mathscr{C}$ n'est donc pas un arc de cercle de centre 0.



2. Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est $\mathscr{A} = 8\displaystyle\int_0^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

La fonction f étant positive et continue sur $[-2{,}5\,;\,2{,}5]$, l'aire située sous la courbe et au dessus de l'axe des abscisses est, en unités d'aire, donnée par :

$$\mathscr{A} = \int_{-2{,}5}^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

Or la courbe est supposée symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc :

$$\mathscr{A} = 2 \times \int_0^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

Et puisque l'unité d'aire est : u.a. = 2 m × 2 m = 4 m^2, on obtient :

$$\boxed{\mathscr{A} = 8\int_0^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ m}^2}$$

3. L'algorithme, donné en annexe, permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I = \displaystyle\int_0^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$, notée a. On admet que : $a \leqslant I \leqslant a + \dfrac{f(0)-f(2{,}5)}{n} \times 2{,}5$.

3. a. Le tableau fourni en annexe, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$. Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.

- A l'étape 1 : on a $R \approx 0{,}130\,116$ et $S \approx 0{,}130\,116$;
- A l'étape 4 : on a $S \approx 0{,}519\,981$;
- A l'étape 50 : on a $R = 0$ et $S \approx 5{,}197\,538$;
- A l'affichage : $S \approx 5{,}197\,538$.

3. b. En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

L'algorithme, donné en annexe, permet de calculer une valeur approchée par défaut de I, de ce fait d'après la remarque on a :

$$a \leqslant I \leqslant a + \frac{f(0)-f(2{,}5)}{n} \times 2{,}5 \Longrightarrow 5{,}197\,538 \leqslant I \leqslant 5{,}197\,538 + \frac{f(0)-f(2{,}5)}{50} \times 2{,}5$$
$$\Longrightarrow 5{,}197\,538 \leqslant I \leqslant 5{,}3277$$

Or une valeur approchée de la zone de creusement est : $\mathscr{A} = 8 \times \displaystyle\int_0^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$ m^2 soit :

$$41{,}58 \leq \mathscr{A} \leq 42{,}622$$

Soit arrondi au m^2 près :

$$\mathscr{A} \approx 42 \text{ m}^2$$

©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Obligatoire : Suites — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux suites (u_n) et (v_n) , la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$ et la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	**5**	**2**

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?

- En B3 on a saisi : $= 2 * B2 - A2 + 3$ et en C3 on a saisi : $= 2 \wedge A3$

2. Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

La suite (u_n) semble tendre vers $+\infty$ et pour la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ on peut en calculer quelques termes :

	rang n	terme u_n	terme v_n	$\dfrac{u_n}{v_n}$
13	11	6 153	2 048	$\dfrac{u_{11}}{v_{11}} = \dfrac{6153}{2048} \approx 3,008802$
14	12	12 298	4 096	$\dfrac{u_{12}}{v_{12}} = \dfrac{12298}{4096} \approx 3,002441406$
15	l3	24 587	8 192	$\dfrac{u_{13}}{v_{13}} = \dfrac{24587}{8192} \approx 3,001342773$

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n) \ : \ u_n = 3 \times 2^n + n - 2$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :
  - D'une part : $u_0 = 1$ et d'autre part : $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$.
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

  $$u_{n+1} = 2 \times u_n - n + 3$$

  On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que : $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$

  $$u_{n+1} = 2 \times \left(3 \times 2^n + n - 2\right) - n + 3$$
  $$u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3$$
  $$u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + n - 1$$

  On a alors montré (P_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{u_n = 3 \times 2^n + n - 2}$$

©ISSN 2272-5318

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

On vient de montrer que pour tout entier n : $u_n = 3\times 2^n + n - 2$.

Puisque $2 > 1$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

Donc par somme de limites on a :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n-2 = +\infty \end{array}\right. \Bigg| \underset{\text{Par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} 3\times 2^n + n - 2 = +\infty$$

La suite (u_n) tend vers $+\infty$.

3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

- Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3\times 2^{n+1} + n - 1 - \left(3\times 2^n + n - 2\right) \\ &= 3\times 2^1 \times 2^n + n - 1 - 3\times 2^n - n + 2 \\ u_{n+1} - u_n &= 3\times 2^n + 1 > 0 \end{aligned}$$

  Donc la suite (u_n) est strictement croissante.
- Or on a :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{18} = 786\,448 < 10^6 \\ u_{19} = 1\,572\,881 > 10^6 \end{array}\right.$$

- La suite étant croissante, à partir du rang $\underline{n = 19}$, tous les termes de la suite seront supérieurs à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

Pour tout entier n supérieur à 3 on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} &= \frac{3\times 2^1\times 2^n + n - 1}{2^{n+1}} - \frac{3\times 2^n + n - 2}{2^n} \\ &= \frac{6\times 2^n + n - 1 - 2\times(3\times 2^n + n - 2)}{2^{n+1}} \\ &= \frac{6\times 2^n + n - 1 - 6\times 2^n - 2n + 4}{2^{n+1}} \\ \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} &= \frac{3-n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Or le dénominateur est clairement strictement positif et si $n \geq 3$ le numérateur $(3-n)$ est négatif ou nul. Soit :

$$n \geq 3 \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} = \frac{3-n}{2^{n+1}} \leq 0$$

La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est donc décroissante à partir du rang 3.

©ISSN 2272-5318

2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} < \dfrac{1}{n}$. Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{v_n} &= 3 - \frac{n-2}{2^n} = 3 - \frac{n}{2^n} + \frac{2}{2^n}\\ &= 3 - \frac{n}{2^n} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

- On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} < \dfrac{1}{n}$. De ce fait, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, par théorème d'encadrement on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$
- En outre puisque $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$
- Par somme de limites :
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 \end{array}\right. \Bigg| \underset{\text{Par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} 3 - \frac{n}{2^n} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3$$

La limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est donc 3.

©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Spécialité : Suites et matrices — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suites (u_n) et (v_n) par : $u_0 = v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$. On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

Partie A : Conjectures

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	3

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des suites ?

- Dans la cellule B3 on peut entrer la formule : $=2*B2+3*C2$;
- Dans la cellule C3 on peut entrer la formule : $=2*B2+C2$.

2. Soit n un entier naturel. Conjecturer la valeur de PGCD$(u_n\ ;\ v_n)$. Aucune justification n'est demandée.

- Pour $n = 0$ on a : PGCD$(u_0\ ;\ v_0)$ = PGCD$(1\ ;\ 1) = 1$;
- Pour $n = 1$ on a : PGCD$(u_1\ ;\ v_1)$ = PGCD$(5\ ;\ 3) = 1$;
- Pour $n = 2$ on a : PGCD$(u_2\ ;\ v_2)$ = PGCD$(19\ ;\ 13) = 1$;
- Pour $n = 3$ on a : PGCD$(u_3\ ;\ v_3)$ = PGCD$(77\ ;\ 51) = 1$.

On peut donc conjecturer que le PGCD$(u_n\ ;\ v_n)$ vaut 1.

3. Elle émet la conjecture : « la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge ». Qu'en penser ?

	rang n	terme u_n	terme v_n	$\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$
12	10	1 258 291	838 861	$\approx 1,4999$
13	Il	5 033 165	3 355 443	$\approx 1,5$
14	12	20 132 659	13 421 773	$\approx 1,5$
15	13	80 530 637	53 687 091	$\approx 1,5$

La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ semble converger vers 1,5.

©ISSN 2272-5318

Partie B : Étude arithmétique

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n) \ : \ 2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :
  - D'une part : $2u_0 - 3v_0 = 2 - 3 = -1$ et d'autre part : $(-1)^{0+1} = -1$.
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{array}\right. \Longrightarrow 2u_{n+1} - 3v_{n+1} = 2 \times (2u_n + 3v_n) - 3 \times (2u_n + v_n)$$
$$= 4u_n + 6v_n - 6u_n - 3v_n$$
$$= -2u_n + 3v_n$$
$$= -(2u_n - 3v_n)$$

  On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que : $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$

$$2u_{n+1} - 3v_{n+1} = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}$$

  On a alors montré (P_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}}$$

2. Soit n un entier naturel. Déduire de la question précédente la valeur de PGCD$(u_n \ ; \ v_n)$.

Théorème 1 (Bézout, 1730-1883)

Deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe deux entiers x et y tels que $ax + by = 1$.

Soit :

$$\text{PGCD}\,(a \ ; \ b) = 1 \Longleftrightarrow \exists\left(x \ ; \ y\right) \in \mathbb{Z}^2 \ ; \ ax + by = 1$$

Remarque *: C'est le groupe Bourbaki qui donne vers 1948 le nom de Bézout à ce théorème qui en fait est énoncé et démontré par le mathématicien français Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) dans ses « Problèmes plaisans et délectables » publié en 1624. Bézout démontre lui une généralisation de ce théorème aux polynômes en 1764 dans un mémoire présenté à l'académie des sciences.*

- On a pour tout entier n pair, alors $(n+1)$ est impair et :

$$2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1} = -1 \Longleftrightarrow -2u_n + 3v_n = 1$$

  On applique alors le théorème de Bézout, il existe deux relatifs $\left(x = -2 \ ; \ y = 3\right)$ tel que $u_n \times x + v_n \times y = 1$ et donc le PGCD de $(u_n \ ; \ v_n)$ vaut 1.
- On a pour tout entier n impair, alors $(n+1)$ est pair et : $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.
  On applique alors le théorème de Bézout, il existe deux relatifs $\left(x = 2 \ ; \ y = -3\right)$ tel que $u_n \times x + v_n \times y = 1$ et donc le PGCD de $(u_n \ ; \ v_n)$ vaut 1.
- Conclusion : pour tout entier n, le PGCD de $(u_n \ ; \ v_n)$ vaut 1.

©ISSN 2272-5318

Partie C : Étude matricielle

Pour tout entier naturel n, on définit :

- la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, les matrices carrées $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3\times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$.

1.

1. a. Montrer que la matrice $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P.

Notons Q la matrice $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient facilement :

$$Q \times P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$$

Cela implique d'après le cours l'égalité $P \times Q = Id$ et donc que Q est la matrice inverse de P.

1. b. On admet que, $X_n = Q_n P^{-1} X_0$. Démontrer que, $\begin{cases} u_n &= \dfrac{(-1)^{n+1} + 3\times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n &= \dfrac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}$, pour tout entier n.

Pour tout entier n on a :

$$X_n = Q_n P^{-1} X_0 \iff \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3\times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix} \times \frac{1}{5} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\iff \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \times \begin{pmatrix} (-1)^n & 3\times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \times \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 3\times 2^{2n+1} \\ (-1)^{n+2} & 2^{2n+2} \end{pmatrix}$$

Et donc pour tout entier n, : $\boxed{\begin{cases} u_n &= \dfrac{(-1)^{n+1} + 3\times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n &= \dfrac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}}$

2.

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}$.

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1} + 3\times 2^{2n+1}}{5}}{\dfrac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5}} = \frac{(-1)^{n+1} + 3\times 2^{2n+1}}{(-1)^n + 2^{2n+2}}$$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{2^{2n+1} \times \left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3\right)}{2^{2n+1} \times \left(\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2\right)}$$

Donc pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{\frac{u_n}{v_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}}$$

©ISSN 2272-5318

2. b. En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

- On a pour tout entier n on a d'une part :

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\times\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}} = \frac{1}{2}\times\frac{(-1)^{n+1}}{4^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

- On a pour tout entier n on a d'autre part :

$$\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} = \frac{(-1)^n}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

- Or puisque $-1<\dfrac{1}{4}<1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ d'où puisque

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right| \leq \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \Longrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} = 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}} = 0\end{cases}$$

Et de ce fait :

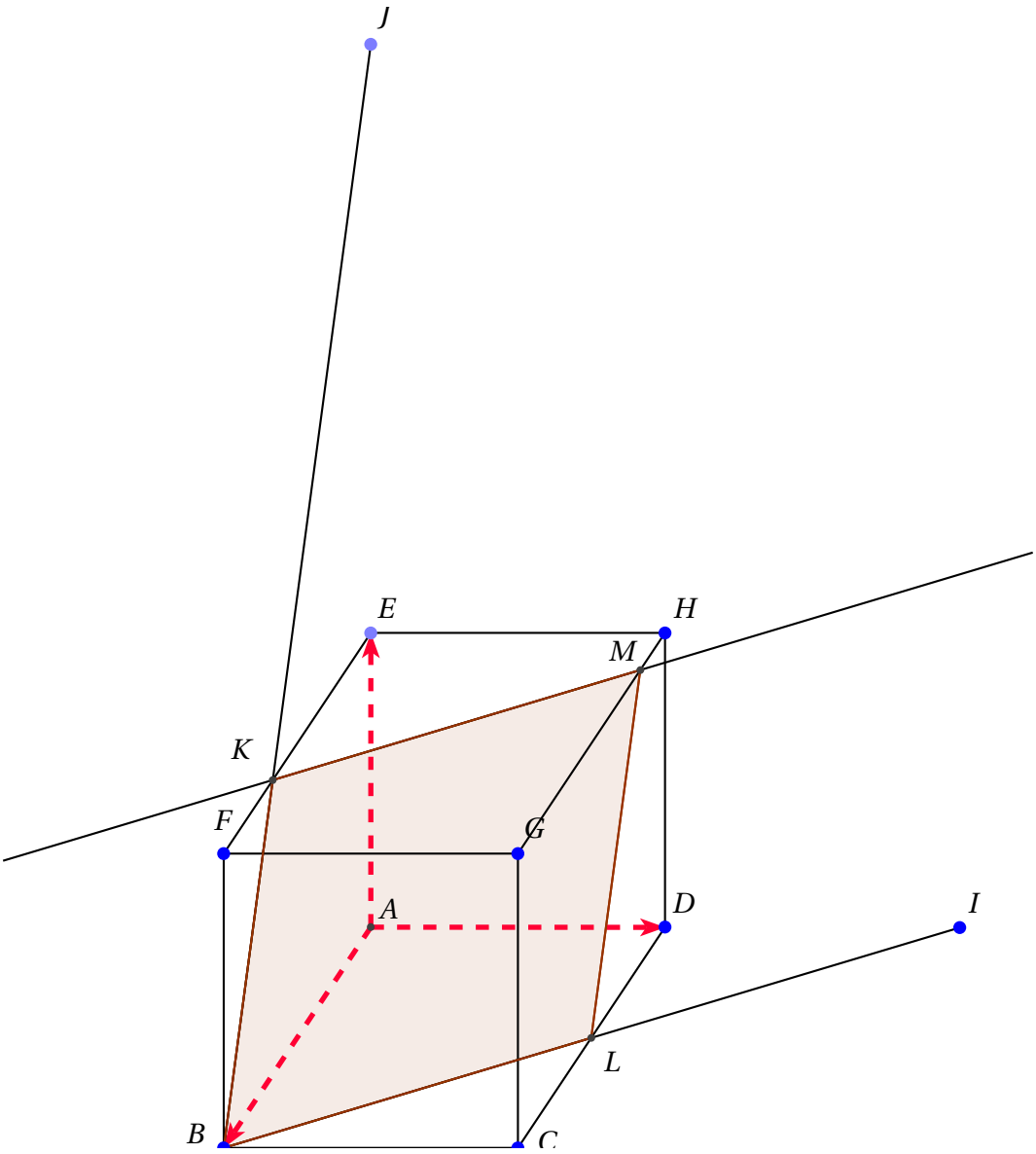
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}+3}{\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}}+2} = \frac{3}{2}}$$

©ISSN 2272-5318

Exercice 5. Espace — 3 points

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH fourni en annexe. L'espace est rapporté au repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-1=0$. Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan $\mathscr{P}$. La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.



- On cherche 3 points non alignés du plan $\mathscr{P}$: $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-1=0$:
  - Pour $y=z=0$ alors $x=1$ donc $B(1;0;0)\in\mathscr{P}$;
  - Pour $x=z=0$ alors $y=2$ donc $I(0;2;0)\in\mathscr{P}$;
  - Pour $x=y=0$ alors $z=3$ donc $J(0;0;3)\in\mathscr{P}$;
- Les droites coplanaires (BI) et (DC) se coupent en L et Les droites coplanaires (BJ) et (EF) se coupent en K.
- Les plans (ABC) et (EFG) étant parallèles, le plan $\mathscr{P}$ les coupe en deux droites parallèles. On construit donc la parallèle à (BL) passant par K, elle coupe la droite coplanaire (HG) en M.
- La section du cube par le plan $\mathscr{P}$ est donc le polygone BLMK.

Fin du devoir

©ISSN 2272-5318