Math93.com

Baccalauréat 2019 - S
Correction Antilles Guyane

Série S Obligatoire et spécialité

Juin 2019

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

Remarque

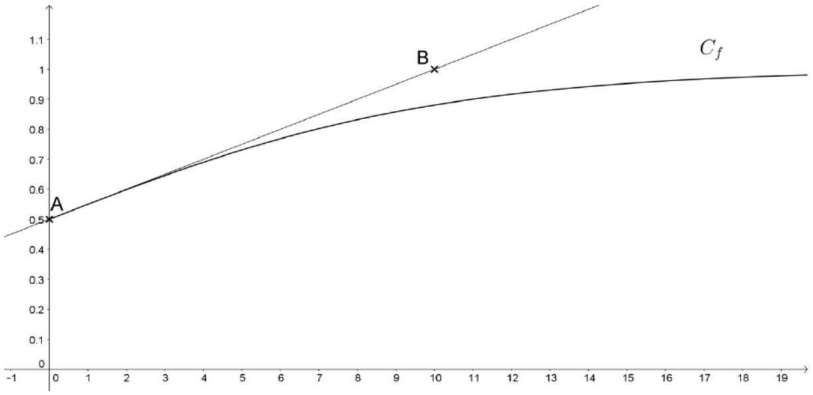
Dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

Exercice 1. Fonctions — 6 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Partie A

On considère une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{a}{1+e^{-bx}}$. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0\ ;\ 0{,}5)$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point $B(10\ ;\ 1)$.



1. **Justifier que $a=1$. On obtient alors, pour tout réel $x\geq 0$, $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}$.**

   Puisque le point A appartient à $\mathscr{C}_f$ on a :

$$f(0)=0{,}5 \iff \frac{a}{1+1}=0{,}5$$
$$\iff \underline{a=1}$$

2. **Vérifier que, pour tout réel $x\geq 0$, $f(x)=\dfrac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}$.**

   La fonction f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{-v'}{v^2}$ soit pour x de $[0\ ;\ +\infty[$:

$v(x)=1+\mathrm{e}^{-bx}$	$v'(x)=-b\mathrm{e}^{-bx}$

$$\boxed{f'(x)=\frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}}$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(0\,;\,0,5)$ passe par le point $B(10\,;\,1)$. Son coefficient directeur est alors :

$$f'(0) = \frac{1-0,5}{10-0} = 0,05$$

De ce fait :

$$\begin{aligned} f'(0) = 0,05 &\iff \frac{b\,\mathrm{e}^{-b\times 0}}{\left(1+\mathrm{e}^{-b\times 0}\right)^2} = 0,05 \\ &\iff \frac{b}{2^2} = 0,05 \\ &\iff \underline{b = 0,2} \end{aligned}$$

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $p(x) = \dfrac{1}{1+e^{-0,2x}}$. Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000. Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années. Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
On a :

$$p(10) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2}} \approx \underline{0,88}$$

Ainsi, environ 88% des individus sont équipés au 1er janvier 2010.

2.

2. a. Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\,;\,+\infty[$.
La fonction p correspond à la fonction f de la partie A avec $b = 0,2$. Pour tout réel x positif on a :

$$p'(x) = \frac{0,2\,\mathrm{e}^{-0,2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,2x}\right)^2}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction dérivée est strictement positive sur $[0\,;\,+\infty[$ et p y est donc strictement croissante.

2. b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- (1) limites usuelles :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \end{cases}$$
- (2) croissances comparées :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0 \end{cases}$$
- (3) (nombre dérivé en 0) :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

Pour tout réel x positif :

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}$$

Donc

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -0,2x = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-0,2x} = 0 \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} p(x) = 1}$$

2. c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
Cela signifie donc que sur le long terme tous les individus seront équipés.

3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95%, le marché est saturé. Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.

$$\begin{aligned} p(x) > 0,95 &\iff \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}} > 0,95 \\ &\iff 1+\mathrm{e}^{-0,2x} < \frac{1}{0,95} \\ &\iff \mathrm{e}^{-0,2x} < \frac{0,05}{0,95} \end{aligned}$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$\begin{aligned} &\iff -0,2x < \ln\frac{1}{19} \\ &\iff x > -5\ln\frac{1}{19} \approx 14,72 \end{aligned}$$

C'est au cours de l'année 2014, entre août et septembre, que le marché sera saturé.

4. *On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 par* $m = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_8^{10} p(x)\,dx$.

4. a. Vérifier que pour tout réel x positif, $p(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}$.
Pour tout réel x positif, en multipliant numérateur et dénominateur par $\mathrm{e}^{0,2x}$:

$$p(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,2x}\right)\times \mathrm{e}^{0,2x}} = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{\mathrm{e}^{0,2x}+1}$$

4. b. En déduire une primitive de la fonction p sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Pour tout réel x positif,

$$p(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{\mathrm{e}^{0,2x}+1} = \frac{1}{0,2}\,\frac{0,2\,\mathrm{e}^{0,2x}}{\mathrm{e}^{0,2x}+1} = \frac{1}{0,2}\times\frac{v'(x)}{v(x)}$$

avec $v(x) = \mathrm{e}^{0,2x}+1$.
Une primitive de la fonction p sur cet intervalle est donc la fonction P définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{0,2}\times\ln\left(1+\mathrm{e}^{0,2x}\right)}$$

4. c. Déterminer la valeur exacte de m et son arrondi au centième .
On a donc :

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}\int_8^{10} p(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(P(10)-P(8)\right) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{0,2}\left(\ln\left(1+\mathrm{e}^{2}\right)-\ln\left(1+\mathrm{e}^{1,6}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{m = \frac{1}{0,4}\ln\frac{1+\mathrm{e}^{2}}{1+\mathrm{e}^{1,6}} \approx \underline{0,86}}$$

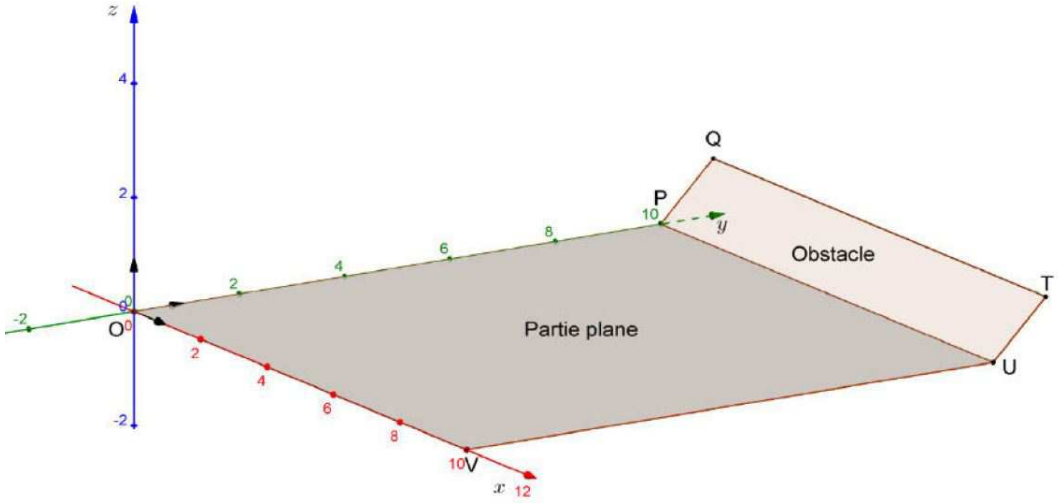
Exercice 2. Espace — 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Alex et Élisa, deux pilotes de drones, s'entraînent sur un terrain constitué d'une partie plane qui est bordée par un obstacle. On considère un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, une unité correspondant à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par leurs coordonnées dans ce repère :

$$O(0\ ;\ 0\ ;\ 0), P(0\ ;\ 10\ ;\ 0), Q(0\ ;\ 11\ ;\ 1), T(10\ ;\ 11\ ;\ 1), U(10\ ;\ 10\ ;\ 0) \text{ et } V(10\ ;\ 0\ ;\ 0)$$

La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle par le rectangle PQTU.



Les deux drones sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes : le drone d'Alex suit la trajectoire portée par la droite (AB) avec A(2 ; 4 ; 0,25) et B(2 ; 6 ; 0,75) ; le drone d'Élisa suit la trajectoire portée par la droite (CD) avec C(4 ; 6 ; 0,25) et D(2 ; 6 ; 0,25).

Partie A : Étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. **Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).** La droite (AB) passant par le point $A(2\,;4\,;0{,}25)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ $(0\,;2\,;0{,}5)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. On a alors :

$$(AB) = \left\{ M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ ;\ \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z-0{,}25 \end{pmatrix} = t\ \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}\ ,\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc :

$$\boxed{(AB)\ :\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2t + 4 \\ z = 0{,}5t + 0{,}25 \end{cases}\ ,\ t \in \mathbb{R}}$$

2.

2. a. Justifier que le vecteur $\vec{n}$ (0 ; 1 ; −1) est un vecteur normal au plan (PQU).

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\ (0;1;1) \\ \overrightarrow{PU}\ (10;0;0) \end{cases} \Longrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{PQ} = 0+1-1 = 0 \text{ et } \vec{n}.\overrightarrow{PU} = 0+0+0 = 0$$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQU). Le vecteur $\vec{n}$ est par conséquent normal au plan (PQU).

2. b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).

Propriété 2

Soit vecteur $\vec{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a(x-x_A)+b\left(y-y_A\right)+c(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 2 :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (PQU) \Longleftrightarrow \overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-10 \\ z-0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (PQU) \Longleftrightarrow y-10-z=0$$

$$\boxed{(PQU)\ :\ y-z-10=0}$$

3. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $\left(21\,;\,\frac{3}{3}\,;\,\frac{7}{3}\right)$.

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (AB)\cap(PQU) \Longleftrightarrow \begin{cases} y-z-10=0 \\ x=2 \\ y=2t+4 \\ z=0,5t+0,25 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2t+4-(0,5t+0,25)-10=0 \\ x=2 \\ y=2t+4 \\ z=0,5t+0,25 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{25}{6} \\ x=2 \\ y=2\times\left(\dfrac{25}{6}\right)+4 \\ z=0,5\times\left(\dfrac{25}{6}\right)+0,25 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{25}{6} \\ x=2 \\ y=\dfrac{37}{3} \end{cases}$$

La droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $\left(21\,;\,\frac{3}{3}\,;\,\frac{7}{3}\right)$.

4. Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

$$I\left(21\,;\,\frac{3}{3}\,;\,\frac{7}{3}\right) \text{ et } \mathrm{Q}(0\,;\,11\,;\,1), \mathrm{T}(10\,;\,11\,;\,1) \Longrightarrow \frac{7}{3} > 1$$

L'altitude ou côte de I est supérieure à celles et P et Q donc le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

Partie B : Distance minimale entre les deux trajectoires

Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Alex et Élisa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones. L'objectif de cette partie est de vérifier si cette consigne est respectée. Pour cela, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD). Il existe alors deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = b\overrightarrow{CD}$. On s'intéresse donc à la distance MN.

1. **Démontrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(2-2b\,;\,2-2a\,;\,-0{,}5a)$.**

$$\overrightarrow{AM}(0\,;\,2a\,;\,0{,}5a)\,;\ \overrightarrow{CD}(-2\,;\,0\,;\,0)\,;\ \overrightarrow{CN}(-2b\,;\,0\,;\,0)\,;\ \overrightarrow{AC}(2\,;\,2\,;\,0)$$

D'après d'après Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN} &= a\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{MN} &= \begin{pmatrix} 0+2-2b \\ 2-2a \\ -0{,}5a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(2-2b\,;\,2-2a\,;\,-0{,}5a)$.

2. **On admet que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On admet également que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD). Démontrer alors que la distance MN est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$.**

- On a :

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = -2(2-2b)\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = 2(2-2a) + 0{,}5(-0{,}5a)\end{cases}$$

- Or on admet également que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD) donc quand les produits scalaires précédents sont nuls soit :

$$\begin{aligned}&\iff \begin{cases}-2(2-2b) = 0\\ 2(2-2a) + 0{,}5(-0{,}5a) = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}2-2b = 0\\ 4-4a-0{,}25a = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}b = 1\\ 4{,}25a = 4\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}b = 1\\ a = \dfrac{16}{17}\end{cases}\end{aligned}$$

3. **En déduire la valeur minimale de la distance MN puis conclure.**

$$\overrightarrow{MN}\left(0;\frac{2}{17};-\frac{8}{17}\right)$$

Or on est dans un repère orthonormé donc :

$$MN = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{17}\right)^2 + \left(-\frac{8}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}} \approx 0{,}49 \text{ u.l.}$$

Conclusion : une unité correspond à 10 mètres donc la distance minimale qui sépare les deux drones est environ égale à 4,9 m, qui est supérieure à la distance de 4 m imposée. Il n'y aura pas de collision entre les deux drones.

Exercice 3. Complexes — 4 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. *On considère le nombre complexe* $c = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ *et les points S et T d'affixes respectives* c^2 *et* $\frac{1}{c}$.

Affirmation 1 (Faux)

Le nombre c peut s'écrire $c = \frac{1}{4}\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.

Preuve

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\pi/3} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

Donc l'affirmation est fausse

Affirmation 2 (Vraie)

Pour tout entier naturel n, c^{3n} est un nombre réel.

Preuve

$$c^{3n} = \frac{1}{2^{3n}}\mathrm{e}^{\,ni\pi}$$

Or $\mathrm{e}^{\,ni\pi} \in \{-1\,;\,1\}$ donc c^{3n} est un nombre réel.

Affirmation 3 (Vraie)

Les points O, S et T sont alignés.

Preuve

Les vecteurs $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont d'affixes respectives :

$$z_{\overrightarrow{OS}} = z_S = c^2 = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\,2\mathrm{i}\pi/3} \text{ et } z_{\overrightarrow{OT}} = z_T = \frac{1}{c} = 2\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\pi/3}$$

Or on a :

$$\frac{z_{\overrightarrow{OT}}}{z_{\overrightarrow{OS}}} = \frac{2\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\pi/3}}{\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\,2\mathrm{i}\pi/3}} = 8\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\pi/3-2\mathrm{i}\pi/3} = 8\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\pi} = -8$$

Donc $z_{\overrightarrow{OT}} = -8z_{\overrightarrow{OS}}$, les deux vecteurs sont colinéaires et les points O,S et T sont alignés. L'affirmation 3 est vraie

Affirmation 4 (Vraie)

Pour tout entier naturel non nul n,

$$|c|+\left|c^2\right|+\ldots+\left|c^n\right|=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Preuve

Pour tout entier n non nul on retrouve la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme $|c|$ et de raison $|c|=\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}|c|+\left|c^2\right|+\ldots+\left|c^n\right| &= |c|\times\frac{1-(|c|)^n}{1-|c|}\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\\ |c|+\left|c^2\right|+\ldots+\left|c^n\right| &= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

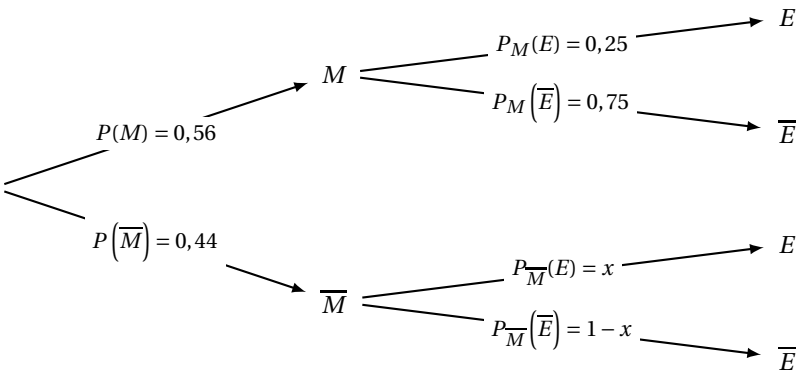
Exercice 4. Obligatoire — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un match. Cette chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match. On dispose des informations suivantes : 56 % des téléspectateurs ont regardé le match ; un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission ; 16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission. On interroge au hasard un téléspectateur. On note les évènements : M : « le téléspectateur a regardé le match » ; E : « le téléspectateur a regardé l'émission ». On note x la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission sachant qu'il n'a pas regardé le match.

1. **Construire un arbre pondéré illustrant la situation.**



2. **Déterminer la probabilité de $M \cap E$.**

$$P(M \cap E) = 0,56 \times 0,25 = \underline{0,14}$$

3.

3. a. Vérifier que $p(E) = 0,44x + 0,14$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(M \cap E) + P\left(\overline{M} \cap E\right)$$
$$P(E) = \underline{0,14 + 0,44x}$$

3. b. En déduire la valeur de x.

16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission donc $P(E) = 0,162$ et :

$$0,14 + 0,44x = 0,162 \iff \underline{x = 0,05}$$

4. **Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il ait regardé le match ?**

D'après la formule de Bayes :

$$P_{\overline{E}}(M) = \frac{P\left(\overline{E} \cap M\right)}{1 - P(E)}$$
$$P_{\overline{E}}(M) = \frac{0,75 \times 0,56}{0,838} \approx \underline{0,50}$$

La probabilité que le téléspectateur ait regardé le match sachant qu'il n'a pas regardé l'émission est environ égale à 0,50.

Remarque historique

Thomas Bayes (1702 – 1761) est un mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne, connu pour avoir formulé le théorème de Bayes.

Partie B

Pour déterminer l'audience des chaînes de télévision, un institut de sondage recueille, au moyen de boîtiers individuels, des informations auprès de milliers de foyers français. Cet institut décide de modéliser le temps passé, en heure, par un téléspectateur devant la télévision le soir du match, par une variable aléatoire T suivant la loi normale d'espérance $\mu = 1,5$ et d'écart-type $\sigma = 0,5$.

1. **Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'un téléspectateur ait passé entre une heure et deux heures devant sa télévision le soir du match ?**
On a avec la calculatrice :
$$P(1 \leq T \leq 2) \approx 0,682$$
La probabilité qu'un spectateur ait passé entre une heure et deux heures devant sa télévision le soit du match est environ égale à 0,682.

2. **Déterminer l'arrondi à 10^{-2} du réel t tel que $P(T \geqslant t) = 0,066$. Interpréter le résultat.**
$$P(T \geq t) = 0,066 \Longleftrightarrow P(T < t) = 0,934$$
La calculatrice donne $t \approx 2,25$ donc 6,6% des spectateurs ont passé plus de 2h 15 minutes devant la télévision le soir du match.

Partie C

La durée de vie d'un boîtier individuel, exprimée en année, est modélisée par une variable aléatoire notée S qui suit une loi exponentielle de paramètre λ strictement positif. On rappelle que la densité de probabilité de S est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. L'institut de sondage a constaté qu'un quart des boîtiers a une durée de vie comprise entre un et deux ans. L'usine qui fabrique les boîtiers affirme que leur durée de vie moyenne est supérieure à trois ans. L'affirmation de l'usine est-elle correcte ? La réponse devra être justifiée.

Propriété 3

Soit λ un réel strictement positif.
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a et b tels que $0 \leq a \leq b$:
$$P(a \leq T \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$
et donc
$$P(T \leq b) = 1 - e^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$$
En outre la variable T est d'espérance : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

L'institut de sondage a constaté qu'un quart des boîtiers a une durée de vie comprise entre un et deux ans. Donc en posant $X = e^{\lambda}$:
$$\begin{cases} P(1 \leq S \leq 2) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} = 0,25 \\ X = e^{\lambda} \end{cases} \Longrightarrow X - X^2 - 0,25 = 0$$

L'expression $\left(-1X^2 + 1X - 0,25\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(aX^2 + bX + c\right)$. Avec :
$$\left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -0.25 \end{array} \right| \Longrightarrow \Delta = 0$$

Le discriminant Δ étant nul, la fonction polynôme du second degré $X \longmapsto \left(-1X^2 + 1X - 0{,}25\right)$ admet une unique racine réelle :

$$X_1 = \frac{-1}{-2} = 0.5$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda} = 0{,}5 \Longleftrightarrow \lambda = -\ln 0{,}5 \Longleftrightarrow \lambda = \ln 2$$

La durée de vie moyenne des boîtiers est

$$E(S) = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}44 < 3$$

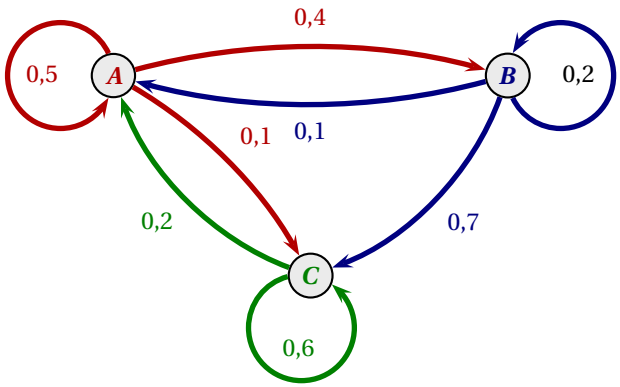
L'affirmation de l'usine est fausse.

Exercice 5. Spécialité — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité *On étudie l'évolution quotidienne des conditions météorologiques d'un village sur une certaine période. On suppose que, pour un jour donné, il existe trois états météorologiques possibles : « ensoleillé », « nuageux sans pluie » et « pluvieux ». On sait que : si le temps est ensoleillé un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est* $0,5$ *et celle qu'il soit pluvieux est* $0,1$ *; si le temps est nuageux sans pluie un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est* $0,2$ *et celle qu'il soit pluvieux est* $0,7$ *; si le temps est pluvieux un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est* $0,6$ *et celle qu'il soit ensoleillé* $0,2$. *Pour tout entier naturel n, on note les évènements : A_n : « le temps est ensoleillé au bout de n jours » ; B_n : « le temps est nuageux sans pluie au bout de n jours » ; C_n : « le temps est pluvieux au bout de n jours ». Pour tout entier naturel n, on note respectivement a_n, b_n et c_n les probabilités des évènements A_n, B_n et C_n. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$. On suppose qu'initialement, le temps est ensoleillé. On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.*

1.

1. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2c_n$.
D'après les données on a l'arbre probabiliste suivant :



On a donc pour tout entier n :

$$\boxed{a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2c_n}$$

1. b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2$. On admet que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 0,2a_n + 0,2$.
Pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2c_n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \end{cases} \Longrightarrow a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2(1 - a_n - b_n)$$

$$\boxed{a_{n+1} = 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2}$$

2. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, $R \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

2. a. Justifier que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + R$.
Pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2 \\ b_{n+1} = 0,2a_n + 0,2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2 \\ 0,2a_n + 0 \times b_n + 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3a_n - 0,1b_n \\ 0,2a_n + 0 \times b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{U_{n+1} = MU_n + R}$$

2. b. **Soit $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tel que $Y = MY + R$. Démontrer que $\alpha = \beta = 0,25$.**

On a :

$$\begin{aligned} Y = MY + R &\iff \begin{cases} \alpha = 0,3\alpha - 0,1\beta + 0,2 \\ \beta = 0,2\alpha + 0,2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta = 0,2\alpha + 0,2 \\ \alpha = 0,3\alpha - 0,1(0,2\alpha + 0,2) + 0,2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta = 0,2\alpha + 0,2 \\ \alpha = 0,28\alpha + 0,18 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta = 0,2\alpha + 0,2 \\ 0,72\alpha = 0,18 \end{cases} \\ &\iff \boxed{\begin{cases} \alpha = 0,25 \\ \beta = 0,25 \end{cases}} \end{aligned}$$

3. *Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - Y$.*

3. a. **En utilisant la question 2., vérifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$**

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - Y \\ &= MU_n + R - (MY + R) \\ &= MU_n + R - MY - R \\ V_{n+1} &= M(U_n - Y) \\ V_{n+1} &= MV_n \end{aligned}$$

$$\boxed{V_{n+1} = MV_n}$$

3. b. **Démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, $V_n = M^n V_0$.** Notons pour tout entier naturel $n \geq 1$ le postulat

$$(P_n) \ : \ V_n = M^n V_0$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, le postulat (P_1) est vrai puisque :

$$V_1 = MV_0 = M^1 V_0$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

$$V_{n+1} = MV_n$$

  On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié $V_n = M^n V_0$ et donc :

$$V_{n+1} = MV_n = M \times M^n V_0 = M^{n+1} V_0$$

  On a alors montré que $V_{n+1} = M^{n+1} V_0$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que (P_1) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 1$.

$$\boxed{V_n = M^n V_0}$$

4. *On admet que, pour tout entier naturel strictement positif n,*

$$M^n = \begin{pmatrix} 2\times 0,2^n - 0,1^n & 0,1^n - 0,2^n \\ 2\times 0,2^n - 2\times 0,1^n & 2\times 0,1^n - 0,2^n \end{pmatrix}.$$

4. a. Déterminer l'expression de a_n en fonction de l'entier strictement positif n.

$$V_0 = U_0 - Y = \begin{pmatrix} 0,75 \\ -0,25 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} V_n = U_n - Y &\iff U_n = V_n + Y \\ &\iff U_n = M^n V_0 + Y \\ &\iff \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 0,2^n - 0,1^n & 0,1^n - 0,2^n \\ 2\times 0,2^n - 2\times 0,1^n & 2\times 0,1^n - 0,2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,75 \\ -0,25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a_n &= 0,75\left(2\times 0,2^n - 0,1^n\right) - 0,25\left(0,1^n - 0,2^n\right) + 0,25 \\ a_n &= \underline{1,75\times 0,2^n - 0,1^n + 0,25} \end{aligned}$$

4. b. Déterminer la limite de la suite (a_n).

Théorème 1

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Ici $-1 < q = 0,2 < 1$ et d'après le théorème 1 on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 0,2^n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 0,1^n = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 1,75\times 0,2^n - 0,1^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (a_n) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,25}$$

4. c. On admet que, pour tout entier naturel n, $c_n = 0,5 + 3\times 0,1^n - 3,5\times 0,2^n$. La probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours peut-elle dépasser 0,5 ?

$$\begin{aligned} c_n > 0,5 &\iff 0,5 + 3\times 0,1^n - 3,5\times 0,2^n > 0,5 \\ &\iff 3\times 0,1^n > 3,5\times 0,2^n \\ &\iff \left(\frac{0,1}{0,2}\right)^n > \frac{3,5}{3} \\ &\iff 0,5^n > \frac{3,5}{3} \end{aligned}$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$\begin{aligned} &\iff n\ln 0,5 > \ln\frac{3,5}{3} \\ &\iff n < \frac{\ln\frac{3,5}{3}}{\ln 0,5} \approx -0,22 \end{aligned}$$

Donc pour tout entier naturel n on a $c_n \leq 0,5$. La probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours ne dépassera jamais 0,5.

Fin du devoir