Math93.com

Baccalauréat 2019 - S
Correction Métropole

Série S Obligatoire et spécialité

21 Juin 2019

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

Remarque

Dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

Exercice 1. — 6 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

1.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

1. b. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Pour x réel on a :

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2}\left(-e^x + e^{-x}\right)}$$

On a alors :

$$f'(x) = \frac{1 - e^{2x}}{2e^x}$$

et donc f' est du signe de $1 - e^{2x}$ puisque l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 1 - e^{2x} = 0 \iff x = 0 \\ 1 - e^{2x} > 0 \iff x < 0 \end{cases} \Longrightarrow 1 - e^{2x} < 0 \iff x > 0$$

Donc f' est négative sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et f décroissante sur cet intervalle.

1. c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, une unique solution, qu'on note α.

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

***Remarque** : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- Application du corollaire sur $[0\,;\,+\infty[$:
  - La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$;
  - Le réel $k=0$ est compris entre $f(0)=\dfrac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. Montrer que $f(x)=0$ admet deux solutions opposées sur $\mathbb{R}$.

- Pour x réel on a $f(-x)=f(x)$ or on a montré qu'il existait $\alpha\in[0\,;\,+\infty[$ telle que $f(\alpha)=0$ et donc : $f(-\alpha)=f(\alpha)=0$.
- Unicité : si il existait une autre solution $\beta\neq-\alpha$ sur $\mathbb{R}_-$ alors nécessairement on aurait $f(-\beta)=f(\beta)=0$ et donc on aurait une 2e solution sur $[0\,;\,+\infty[$ ce qui est impossible d'après ce qui précède.
- Conclusion : $f(x)=0$ admet deux solutions opposées sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Calculer la hauteur d'un arceau.

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On sait que pour tout réel x positif on a $f(-x)=f(x)$. La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$. Par conséquent la fonction f atteint son maximum en 0.

La hauteur est : $\boxed{f(0)=\dfrac{5}{2}\text{ m}}$.

2.

2. a. Montrer que : $1+(f'(x))^2=\dfrac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)^2$.

Pour x de $[-\alpha\,;\,\alpha]$ on a :

$$\begin{aligned}1+(f'(x))^2&=1+\left(\frac{1}{2}\left(-e^x+e^{-x}\right)\right)^2\\&=1+\frac{1}{4}\left(e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}\right)\\&=\frac{4}{4}+\frac{1}{4}\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\left(e^x\right)^2+2\underbrace{e^{-x}e^x}_{1}+\left(e^x\right)^2\right)\\&=\frac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)^2\end{aligned}$$

$$\boxed{1+(f'(x))^2=\frac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

2. b. En déduire la valeur de l'intégrale et justifier que la longueur d'un arceau est $e^{\alpha}-e^{-\alpha}$.

©ISSN 2272-5318

$$I = \int_0^\alpha \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$
$$I = \int_0^\alpha \sqrt{\frac{1}{4}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}\,\mathrm{d}x$$
$$I = \int_0^\alpha \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \text{ car } \left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)>0$$
$$I = \left[\ \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)\ \right]_0^\alpha$$
$$I = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^{-0}\right)$$
$$\boxed{I = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)}$$

Et par raison de symétrie, la longueur d'un arceau est

$$\boxed{2I = \mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^{-\alpha}}$$

Partie C

1. **Montrer que la quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m^2, par : $A = 4\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x - 2$.**

L'aire de la bâche recouvrant la façade nord est l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-\alpha\,;\,\alpha]$.

Or la fonction f est définie, continue et positive sur cet intervalle donc par raison de symétrie :

$$A_{sud} = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$$

L'aire de la porte étant de 2×1 m^2 , la quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m^2, par :

$$\boxed{A = 4\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x - 2}$$

2. **On prend 1,92 pour valeur approchée de α. Déterminer, au m^2 près, l'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.**

Le rectangle recouvrant la serre est de côtés $3\times 1{,}5$ et $2I = \mathrm{e}^\alpha+\mathrm{e}^{-\alpha}$ (celle d'un arceau).

Son aire est donc : $4{,}5\left(\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)$.

L'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre est donc :

$$A_T = 4{,}5\left(\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)+4\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x - 2$$

Or on a :

$$\int_0^\alpha f(x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^\alpha$$
$$= \frac{7\alpha}{2}-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}A_T &= 4{,}5\left(\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)+4\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x - 2\\ &= 4{,}5\left(\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)+4\left(\frac{7\alpha}{2}-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)\right)-2\\ &= 2{,}5\left(\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)+14\alpha-2\\ &\approx 41{,}57\end{aligned}$$

Il faut donc prévoir environ 42 m^2 de bâche pour réaliser cette serre.

Exercice 2. Probabilités — 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Partie A

1.

1. a. La variable aléatoire X_A suit la loi uniforme sur l'intervalle $[9\,;25]$ donc

$$E(X_A) = \frac{9+25}{2} = 17$$

Une partie de type A dure donc en moyenne 17 minutes.

1. b. L'axe de symétrie de la représentation graphique de la fonction de densité semble avoir pour équation $x = 17$. Une partie de type B dure donc en moyenne $\mu = 17$ minutes.

2. On choisit au hasard, de manière équiprobable, un type de jeu. Quelle est la probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes ? On donnera le résultat arrondi au centième.

- $P(X_A < 20) = \dfrac{20-9}{25-9} = 0,6875$;
- X_B suit une loi normale donc la calculatrice donne :

$$\begin{aligned} P(X_B \leq 20) &= 0,5 + P(17 < X_B < 20) \\ &\approx 0,841\,3 \end{aligned}$$

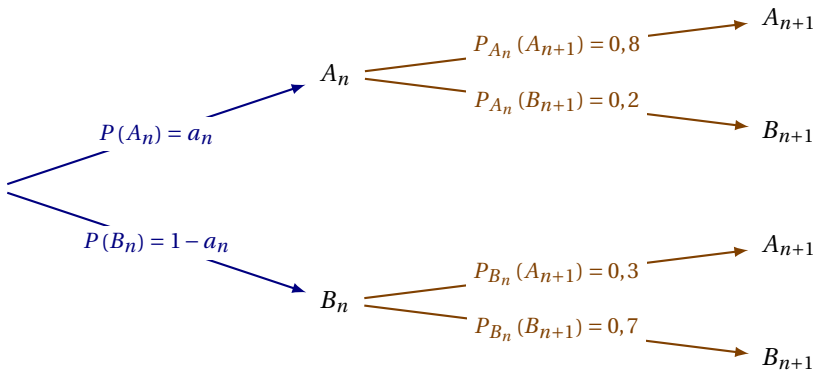
- Or on choisit de manière équiprobable le jeu donc la probabilité cherchée est :

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\left(P(X_A < 20) + P(X_B \leq 20)\right) \\ &\approx 0,76 \end{aligned}$$

Partie B

1.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.



1. b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

D'après la formule des probabilités totales, pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) \\ &= 0,8a_n + 0,3(1 - a_n) \\ a_{n+1} &= 0,5a_n + 0,3 \end{aligned}$$

$$\boxed{a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3}$$

©ISSN 2272-5318

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle [0; 1]. La suite (a_n) est donc définie par : $a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

2. *Étude d'un cas particulier : Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.*

2. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq a_n \leq 0,6$.
Notons pour tout entier naturel $n \geq 1$ la propriété

$$P(n) \ : \ 0 \leq a_n \leq 0,6$$

- **Initialisation**
Pour $n = 1$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque : $a_1 = 0,5 \in [0 \ ; \ 0,6]$
- **Hérédité**
Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$. On a pour n entier

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que $P(n)$ soit vérifiée et donc que $0 \leq a_n \leq 0,6$. En multipliant les membres de l'inégalité par 0,5 puis en ajoutant 0,3 on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n \leq 0,6 &\Longrightarrow 0,5 \times 0 \leq 0,5 \times a_n \leq 0,5 \times 0,6 \\ &\Longrightarrow 0 \leq 0,5\, a_n \leq 0,3 \\ &\Longrightarrow 0,3 \leq \underbrace{0,5\, a_n + 0,3}_{a_{n+1}} \leq 0,3 + 0,3 \\ &\Longrightarrow 0 < 0,3 \leq a_{n+1} \leq 0,6 \end{aligned}$$

On a alors montré que $0 \leq a_{n+1} \leq 0,6$ et donc que $P(n)$ est vraie.
- **Conclusion**
On a montré que $P(1)$ est vraie. De plus, si l'on suppose la propriété $P(n)$ vérifiée, alors elle l'est aussi au rang suivant, $P(n+1)$ est vraie. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

$$\boxed{0 \leq a_n \leq 0,6}$$

2. b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.
Pour $n \geq 1$ entier on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 0,5a_n + 0,3 - a_n \\ &= -0,5a_n + 0,3 \end{aligned}$$

Or on a montrer que pour $n \geq 1$ on a $0 \leq a_n \leq 0,6$ donc

$$0,5 \times 0 \geq -0,5a_n \geq -0,5 \times 0,6$$

et

$$0,3 = -0,5 \times 0 + 0,3 \geq -0,5a_n + 0,3 \geq -0,5 \times 0,6 + 0,3 = 0$$

soit

$$\boxed{0 \leq a_{n+1} - a_n \leq 0,3}$$

La suite (a_n) est croissante.

2. c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.
La suite (a_n) est croissante et majorée par 0,6 donc elle est convergente vers $0 \leq L \leq 0,6$.
Sa limite L vérifie alors l'équation :

$$L = 0,5L + 0,3 \iff \underline{L = 0,6}$$

©ISSN 2272-5318

3. Étude du cas général : Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0;1]$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $u_n = a_n - 0,6$.

3. a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
Pour $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,6 \\ &= 0,5a_n + 0,3 - 0,6 \\ &= 0,5a_n - 0,3 \\ &= 0,5(u_n + 0,6) - 0,3 \\ &= 0,5u_n + 0,3 - 0,3 \\ u_{n+1} &= 0,5u_n \end{aligned}$$

Donc (u_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$.

3. b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_n = (a-0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$
(u_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$, donc pour $n \geq 1$

$$u_n = u_1 \times 0,5^{n-1} = (a-0,6) \times 0,5^{n-1}$$

et puisque $u_n = a_n - 0,6$, alors $a_n = u_n + 0,6$ et :

$$\boxed{a_n = (a-0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6}$$

3. c. Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Ici $-1 < q = 0,5 < 1$ et d'après le théorème 2 on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,5)^n = 0$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} (a-0,6) \times (0,5)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \Big(\underbrace{(a-0,6) \times (0,5)^n + 0,6}_{a_n} \Big) = 0,6$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (a_n) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,6}$$

3. d. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre publicité insérée en début des parties de type B. Quelle devrait être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?
Sur le long terme, la probabilité que le joueur fasse une partie de type A est égale à 0,6 et celle qu'il fasse une partie de type B est égale à 0,4. Par conséquent le joueur verra plus souvent la publicité insérée au début des parties de type A.

Exercice 3. Vrai/Faux — 4 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Affirmation 1 (Vraie)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. On note A et B les points du plan dont les affixes sont les solutions de (E).
Affirmation 1 : Le triangle OAB est équilatéral.

Preuve

L'équation (E) est une équation du second degré, de discriminant :

$$\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -4 = (2\,\mathrm{i})^2 < 0$$

Les racines sont les complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}}{2} = \sqrt{3} - \mathrm{i} \text{ et } z_2 = \overline{z_1}$$

En notant A et B les points d'abscisses z_1 et z_2 on a alors :

$$\begin{cases} OA^2 = |z_1|^2 = 3 + 1 = 4 \\ OB^2 = \left|\overline{z_1}\right|^2 = 4 \\ AB^2 = \left|\overline{z_1} - z_1\right|^2 = |2\,\mathrm{i}|^2 = 4 \end{cases}$$

Donc OAB est équilatéral.

Affirmation 2 (Faux)

On note u le nombre complexe : $u = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.
Affirmation 2 : $u^{2019} + \overline{u}^{2019} = 2^{2019}$.

Preuve

On a :

$$u = \sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$$

or on a par division euclidienne : $2019 = 6 \times 336 + 3$

$$\begin{aligned} u^{2019} &= \left(2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\right)^{2019} \\ u^{2019} &= 2^{2019}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{2019}{6}} \\ u^{2019} &= 2^{2019}\,\mathrm{e}^{336\,\mathrm{i}\,\pi + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \\ u^{2019} &= 2^{2019}\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

De ce fait

$$u^{2019} + \overline{u}^{2019} = 2^{2019}\,\mathrm{i} + \overline{2^{2019}\,\mathrm{i}} = 0$$

L'affirmation est fausse

©ISSN 2272-5318

Affirmation 3

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx+1}$$

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geq 1$, la fonction f_n admet un maximum.

Preuve

Pour $n \geq 1$ la fonction f_n est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et

$$f_n'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-nx+1} + x \times \left(-n\,\mathrm{e}^{-nx+1}\right)$$
$$f_n'(x) = (1-nx)\,\mathrm{e}^{-nx+1}$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f' est du signe du facteur $(1-nx)$.
Pour $n \geq 1$ on a :

$$\begin{cases} 1-nx = 0 \iff x = \dfrac{1}{n} \\ \\ 1-nx > 0 \iff x < \dfrac{1}{n} \end{cases} \Longrightarrow 1-nx < 0 \iff x > \frac{1}{n}$$

La fonction f_n est donc croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{n}\right[$ et décroissante sur $\left]\dfrac{1}{n}\,;\,+\infty\right[$. Elle admet un maximum en $\dfrac{1}{n}$.

Affirmation 4

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Affirmation 4 : La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.

Preuve

Pour tout réels x on a :

$$\begin{cases} -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ \mathrm{e}^{-x} > 0 \end{cases} \Longrightarrow -\mathrm{e}^{-x} \leq f(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-x}$$

Or

$$\lim_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$$

De ce fait on applique le théorème d'encadrement :

$$\begin{cases} -\mathrm{e}^{-x} \leq f(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-x} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.

Affirmation 5 (Faux)

Soit A un nombre réel strictement positif. On considère l'algorithme ci-contre.

Pseudo Code

$I \longleftarrow 0$
Tant que $2^I \leq A$ Faire
    $I \leftarrow I+1$
Fin Tant que

On suppose que la variable I contient la valeur 15 en fin d'exécution de cet algorithme.
Affirmation 5 : $15\ln(2) \leq \ln(A) \leq 16\ln(2)$.

Preuve

SI la variable I contient la valeur 15 en fin d'exécution, c'est que :

$$\begin{cases} 2^{14} \leq A \\ 2^{15} > A \end{cases}$$

De ce fait on a

$$2^{14} \leq A < 2^{15}$$

On compose par la fonction ln strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé.

$$\ln 2^{14} \leq \ln A < \ln 2^{15}$$

Soit

$$\boxed{14\ln 2 \leq \ln A < 15\ln 2}$$

©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Obligatoire — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité

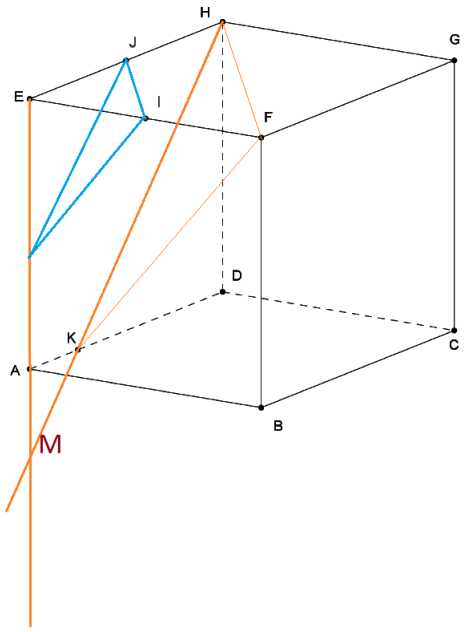
La suite de la correction est en cours de réalisation

Partie A

1. **Le plan (FHK) coupe la droite (AE) en un point qu'on note M. Construire le point M.**
   M est à l'intersection des droites (AE) et (HK).

2. **Construire la section du cube par le plan P, le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).**

   - I et J sont les milieux des segments [EF] et [EH] donc d'après le théorème des milieux, les droites (IJ) et (FH) sont parallèles.
   - La droite (FM) est l'intersection des plans (AEF) et (FHK).
   - L'intersection du plan P et de la face ABFE est donc la droite parallèle à la droite (FM) passant par le point I.



Partie B

1.

1. a. **Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ normal à (FHK).**

Dans $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$ on a :

$$\begin{cases} F(1\,;\,0\,;\,1) \\ H(0\,;\,1\,;\,1) \\ K(0\,;\,0{,}25\,;\,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}=0 \\ \overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}-1\\0{,}25\\-1\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}=0 \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FHK). C'est un vecteur normal à ce plan.

©ISSN 2272-5318

1. b. En déduire une équation de (FHK).

Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (FHK). Une équation cartésienne du plan (FHK) est donc de la forme $4x+4y-3z+d=0$. Le point H$(0\,;1\,;1)$ appartient à ce plan donc

$$0+4-3+d=0 \iff d=-1$$

Une équation cartésienne du plan (FHK) est : $4x+4y-3z-1=0$.

1. c. En déduire une équation de $\mathscr{P}$.

Le vecteur $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donc de la forme $4x+4y-3z+d=0$. Le point I milieu de [EF] est de coordonnées I$(0{,}5\,;0\,;1)$ et appartient à ce plan donc

$$2+0-3+d=0 \iff d=1$$

Une équation cartésienne du plan (FHK)$\mathscr{P}$ est : $4x+4y-3z+1=0$.

1. d. Calculer les coordonnées du point M', point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AE).

- Équation de (AE).
  La droite (AE) passant par le point $A(0\,;0\,;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AE}$ $(0\,;0\,;1)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AE}$. On a alors :

$$(AE)=\left\{M(x\,;\,y\,;\,z)\,;\,\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-0\end{pmatrix}=t\,\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\;,\;t\in\mathbb{R}\right\}$$

  Une représentation paramétrique de la droite (AE) est donc :

$$\boxed{(AE)\;:\;\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases},\;t\in\mathbb{R}}$$

- Intersection.

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(AE)\cap\mathscr{P}\iff\begin{cases}4x+4y-3z=-1\\x=0\\y=0\\z=t\end{cases}\iff\begin{cases}t=\dfrac{1}{3}\\x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$$

  Donc $M'\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

2. *On note Δ la droite passant par le point E et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.*

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ donc La droite Δ passant par le point $E(0\,;0\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{n}$ $(4\,;4\,;-3)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{EM}$ soit colinéaire à $\vec{n}$. On a alors :

$$\Delta=\left\{M(x\,;\,y\,;\,z)\,;\,\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-1\end{pmatrix}=t\,\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}\;,\;t\in\mathbb{R}\right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\boxed{\Delta\;:\;\begin{cases}x=4t'\\y=4t'\\z=1-3t'\end{cases},\;t\in\mathbb{R}}$$

©ISSN 2272-5318

2. b. Calculer les coordonnées du point L, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Le plan (ABC) est d'équation $z = 0$ donc les coordonnées de L sont solutions de

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 4t' \\ y = 4t' \\ z = 1 - 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 3t' = 0 \\ x = 4t' \\ y = 4t' \\ z = 1 - 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} t' = \dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

Et donc : $L\left(\frac{4}{3}\,;\,\frac{4}{3}\,;\,0\right)$

2. c. Tracer la droite ? sur la figure donnée en annexe page 7, à rendre avec la copie.

2. d. Les droites Δ et (BF) sont-elles sécantes ? Qu'en est-il des droites Δ et (CG) ? Justifier.

$$\Delta \ : \ \begin{cases} x = 4t' \\ y = 4t' \\ z = 1 - 3t' \end{cases} \quad , \ t \in \mathbb{R}$$

- Les droites Δ et (BF) ne sont pas sécantes.
- Dans la représentation paramétrique de Δ si on prend $t' = \dfrac{1}{4}$ on obtient le point de coordonnées (1 ; 1 ; 0,25) qui appartient à la droite (CG). Les droites Δ et (CG) sont donc sécantes.

Exercice 4. Spécialité — 5 points

Candidats ayant choisi la spécialité

Dans cet exercice, on étudie l'ensemble S des matrices qui s'écrivent sous la forme $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *où a, b, c et d appartiennent à l'ensemble* $\mathbb{Z}$ *et vérifient :* $ad-bc=1$. *On note I la matrice identité* $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie A

1. **Vérifier que la matrice** $A=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ **appartient à l'ensemble** S.

   On a :

   $$6\times(-4)-(-5)\times 5=-24+25=1$$

   Donc A appartient à S?

2. **Montrer qu'il existe exactement quatre matrices de la forme** $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ **appartenant à l'ensemble** S**; les expliciter.**

   $$A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}\in S \iff ad-6=1 \iff ad=7=1\times 7$$

   Or a et d sont des entiers relatifs donc on a quatre possibilités :

   $$\boxed{\begin{cases} a=1 \text{ et } d=7 \\ a=-1 \text{ et } d=-7 \\ a=7 \text{ et } d=1 \\ a=-7 \text{ et } d=-1 \end{cases}}$$

3. 3. a. **Résoudre dans** S **l'équation** $(E):5x-2y=1$**. On pourra remarquer que le couple (1;2) est une solution particulière de cette équation.**

   Une solution particulière est : (1 ; 2)

   - **Transformation de l'équation**

     $$(E):5x-2y=1$$

     Puisque le couple (1 ; 2) est une solution particulière de l'équation (E) on a : $5\times 1-2\times 2=1$.
     Donc

     $$\begin{cases} 5\times x - 2\times y = 1 \\ 5\times 1 - 2\times 2 = 1 \end{cases} \underset{\text{par soustraction}}{\Longrightarrow} 5(x-1)-2(y-2)=0$$

     Donc l'équation (E) devient :

     $$(E):5(x-1)=2(y-2)$$

   - **Application du théorème de Gauss**

     Théorème 3 (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)

     Soit a, b, c des entiers.

     Si $\begin{cases} a \text{ divise le produit } bc \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{cases}$, alors a divise c.

     Remarque : Le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss énonce et prouve ce théorème (sous forme de lemme en fait) en 1801 dans son ouvrage « *Disquisitiones arithmeticae* ».

©ISSN 2272-5318

$$(E)\ :\ 5(x-1)=2(y-2)$$

Puisque 5 et 2 sont premiers entre eux, alors en appliquant le théorème de Gauss :

$$\begin{cases} 5 \text{ divise le produit } 2(y-2) \\ 5 \text{ et } 2 \text{ sont premiers entre eux} \end{cases} \underset{\text{d'après le th. de Gauss}}{\Longrightarrow} 5 \text{ divise } (y-2)$$

$$\begin{cases} 2 \text{ divise le produit } 5(x-1) \\ 5 \text{ et } 2 \text{ sont premiers entre eux} \end{cases} \underset{\text{d'après le th. de Gauss}}{\Longrightarrow} 2 \text{ divise } (x-1)$$

Il existe donc des entiers k et k' tels que :

$$\begin{cases} (y-2) &= 5k \\ (x-1) &= 2k' \end{cases}$$

En reportant dans l'équation (E) on obtient

$$5\times 2k' = 2\times 5k \Longleftrightarrow k=k'$$

Ainsi, les solutions de l'équation (E) sont les couples de la forme

$$\boxed{\left(1+2k\ ;\ 2+5k\right)\ ;\ k\in\mathbb{Z}}$$

3. b. En déduire qu'il existe une infinité de matrices de la forme $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ qui appartiennent à l'ensemble S. Décrire ces matrices.

$$A\in S \Longleftrightarrow 5a-2b=1$$

On utilise alors le résultat de la question précédente et le matrices solution sont de la forme :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1+2k & 2+5k \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\quad k\in\mathbb{Z}}$$

Partie B

Dans cette partie, on note $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à l'ensemble S. On rappelle que a, b, c et d sont des entiers relatifs tels que $ad-bc=1$.

1. Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux.

$$ad-bc=1 \Longleftrightarrow a\times d+b\times(-x)=1$$

Donc d'après le théorème de Bézout, a et b sont premiers entre eux.

Théorème 4 (Bézout, 1730-1883)

Deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $au+bv=1$.

Soit :

$$\text{PGCD}\,(a\ ;\ b)=1 \Longleftrightarrow \exists\,(u\ ;\ v)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ au+bv=1$$

Remarque : C'est le groupe Bourbaki qui donne vers 1948 le nom de Bézout à ce théorème qui en fait est énoncé et démontré par le mathématicien français Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) dans ses « *Problèmes plaisans et délectables* » publié en 1624. Bézout démontre lui une généralisation de ce théorème aux polynômes en 1764 dans un mémoire présenté à l'académie des sciences.

2. *Soit B la matrice : $B=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$*

©ISSN 2272-5318

2. a. Calculer le produit AB. On admet que $AB = BA$.

$$AB = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = I$$

2. b. En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

$AB = Id$ donc A est inversible et $A^{-1} = B$.

2. c. Montrer que A^{-1} appartient à l'ensemble S.

$$da-(-b)\times(-c) = ad-bc = 1$$

Donc A^{-1} appartient à l'ensemble S.

3. Soient x et y deux entiers relatifs. On note x' et y' les entiers relatifs tels que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

3. a. Montrer que $x = dx' - by'$ On admet de même que $y = ay' - cx'$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx'-by' \\ -cx'+ay' \end{pmatrix}$$

3. b. On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y'. Montrer que $D = D'$.

- D' divise à la fois x' et y' il divise donc également $x = dx' - by'$ et $y = ay' - cx'$. Par conséquent D' divise D.
- De même D divise à la fois x et y donc il divise $x' = ax + by$ et $y' = cx + dy$, donc D divise x' et y'. Ainsi D divise D'.
- Conclusion : $D = D'$.

4. On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2019$, $y_0 = 673$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$$

En utilisant la question précédente, déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD des entiers x_n et y_n.

On a :

$$2019 = 3 \times 673$$

Le PGCD de x_0 et y_0 est donc 673. D'après la question précédente 673 est également le PGCD des entiers x_n et y_n.

Fin du devoir

©ISSN 2272-5318