# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

## SESSION 2019

# MATHÉMATIQUES

## Série S

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

**Enseignement obligatoire –** *Coefficient : 7*

**L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.**

*Le sujet est composé de quatre exercices.*
*Le candidat doit traiter tous les exercices.*
*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.**

OBLIGATOIRE

## Exercice 1 - Pour tous les candidats (6 points)

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80° C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée *M*.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite ; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

*Les parties A et B sont indépendantes.*

### Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel *n*, on note $T_n$ la température du café à l'instant *n*, avec $T_n$ exprimé en degré Celsius et *n* en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques *n* et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k\left(T_n - M\right)$$

où *k* est une constante réelle.

Dans la suite de la partie **A**, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.
Ainsi, pour tout entier naturel *n*, on a : $T_{n+1} - T_n = -0,2\left(T_n - 10\right)$.

**1.** D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite $\left(T_n\right)$ ?

**2.** Montrer que pour tout entier naturel *n* : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.

**3.** On pose, pour tout entier naturel *n* : $u_n = T_n - 10$.

**a)** Montrer que $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme $u_0$.

**b)** Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.

**c)** Déterminer la limite de la suite $\left(T_n\right)$.

**4.** On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que T ≥ 40
        T ← 0,8T + 2
        n ← n + 1
Fin Tant que
```

**a)** Au début, on affecte la valeur 80 à la variable *T* et la valeur 0 à la variable *n*.
Quelle valeur numérique contient la variable *n* à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

**b)** Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

### Partie B

Dans cette partie, pour tout réel *t* positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant *t*, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et *t* en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.
Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie **A**, on suppose que $\theta$ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et que, pour tout réel *t* de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité : $\theta'(t) = -0,2\left(\theta(t) - M\right)$.

**1.** Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction $\theta$ dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel *t* de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$.

**a)** Si $\theta$ est une telle fonction, on pose pour tout *t* de l'intervalle $[0, +\infty[$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0,2t}}$.

Montrer que la fonction *f* est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que, pour tout réel *t* de cet intervalle, $f'(t) = 0$.

**b)** En conservant l'hypothèse du **a)**, Calculer $f(0)$.

En déduire, pour tout *t* de l'intervalle $[0, +\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.

**c)** Vérifier que la fonction $\theta$ trouvée en **b)** est solution du problème.

**2.** Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction *g* dérivable sur $[0, +\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif *t*, et que, pour tout *t* de l'intervalle $[0, +\infty[$ :

$$g(t) = 10 + 70\mathrm{e}^{-0,2t},$$

où *t* est exprimé en minute et $g(t)$ en degré Celsius.

Une personne aime boire son café à 40° C.

Montrer qu'il existe un unique réel $t_0$ dans $[0, +\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$.

Donner la valeur de $t_0$ arrondie à la seconde.

## Exercice 2 – Pour tous les candidats (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre affirmations est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Il est attribué un point si la lettre correspond à l'affirmation exacte, 0 sinon.

Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace.

*Les quatre questions sont indépendantes.* ***Aucune justification n'est demandée****.*

**1.** On considère le plan p d'équation cartésienne $3x + 2y + 9z - 5 = 0$ et la droite d dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -t + 2 \\ z = -t + 9 \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

**Affirmation A** : l'intersection du plan p et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(3\,;2\,;9)$.

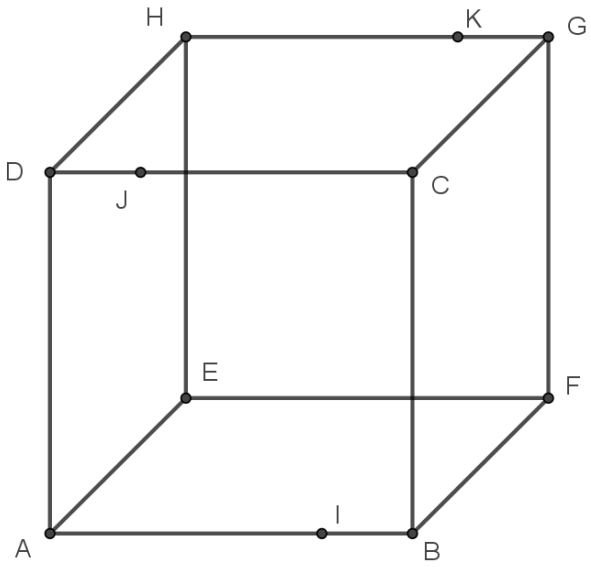
**Affirmation B** : le plan p et la droite d sont orthogonaux.

**Affirmation C** : le plan p et la droite d sont parallèles.

**Affirmation D** : l'intersection du plan p et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(-353\,;91\,;98)$.

**2.** On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre et les points I, J et K définis par les égalités vectorielles :

$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$.




**Affirmation A** : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un triangle.

**Affirmation B** : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un quadrilatère.

**Affirmation C** : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un pentagone.

**Affirmation D** : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un hexagone.

**3.** On considère la droite d dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t+2 \\ y = 2 \\ z = 5t-6 \end{cases}$, avec $t \in \mathbf{R}$, et le point $A(-2\,;1\,;0)$. Soit M un point variable de la droite d.

**Affirmation A** : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{53}$.

**Affirmation B** : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{27}$.

**Affirmation C** : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(-2\,;1\,;0)$.

**Affirmation D** : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(2\,;2\,;-6)$.

**4.** On considère le plan p d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ et le plan p' d'équation cartésienne $2x-y+2=0$.

**Affirmation A** : les plans p et p' sont parallèles.

**Affirmation B** : l'intersection des plans p et p' est une droite passant par les points $A(5\,;12\,;10)$ et $B(3\,;1\,;2)$.

**Affirmation C** : l'intersection des plans p et p' est une droite passant par le point $C(2\,;6\,;5)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1\,;2\,;2)$.

**Affirmation D** : l'intersection des plans p et p' est une droite passant par le point $D(-1\,;0\,;0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}(3\,;6\,;5)$.

## Exercice 3 – Pour tous les candidats (5 points)

*Les parties A, B et C sont indépendantes.*

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats au millième.

### Partie A

En France, la consommation de produits bio croît depuis plusieurs années.
En 2017, le pays comptait 52 % de femmes. Cette même année, 92 % des Français avaient déjà consommé des produits bio. De plus, parmi les consommateurs de produits bio, 55 % étaient des femmes.

On choisit au hasard une personne dans le fichier des Français de 2017. On note :

- $F$ l'évènement « la personne choisie est une femme » ;
- $H$ l'évènement « la personne choisie est un homme » ;
- $B$ l'évènement « la personne choisie a déjà consommé des produits bio ».

**1.** Traduire les données numériques de l'énoncé à l'aide des évènements $F$ et $B$.

**2. a)** Montrer que $P(F \cap B) = 0,506$.

**b)** En déduire la probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme.

**3.** Calculer $P_H\left(\overline{B}\right)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

### Partie B

Dans un supermarché, un chef de rayon souhaite développer l'offre de produits bio.
Afin de justifier sa démarche, il affirme à son responsable que 75 % des clients achètent des produits bio au moins une fois par mois.
Le responsable souhaite vérifier ses dires. Pour cela, il organise un sondage à la sortie du magasin. Sur 2 000 personnes interrogées, 1 421 répondent qu'elles consomment des produits bio au moins une fois par mois.

Au seuil de 95 %, que peut-on penser de l'affirmation du chef de rayon ?

### Partie C

Pour promouvoir les produits bio de son enseigne, le responsable d'un magasin décide d'organiser un jeu qui consiste, pour un client, à remplir un panier avec une certaine masse d'abricots issus de l'agriculture biologique. Il est annoncé que le client gagne le contenu du panier si la masse d'abricots déposés est comprise entre 3,2 et 3,5 kilogrammes.

La masse de fruits en kg, mis dans le panier par les clients, peut être modélisée par une variable aléatoire $X$ suivant la loi de probabilité de densité $f$ définie sur l'intervalle [3 ; 4] par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-2)^2}.$$

*Rappel : on appelle fonction de densité d'une loi de probabilité sur l'intervalle [a, b] toute fonction $f$ définie, continue et positive sur* [*a, b*]*, telle que l'intégrale de f sur* [*a, b*] *est égale à 1.*

**1.** Vérifier que la fonction $f$ précédemment définie est bien une fonction de densité d'une loi de probabilité sur l'intervalle [3 ; 4].

**2.** Le magasin annonce : « *Un client sur trois gagne le panier !* ». Cette annonce est-elle exacte ?

**3.** Cette question a pour but de calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire $X$. On rappelle que, pour une variable aléatoire $X$ de densité $f$ sur l'intervalle $[a, b]$, $E(X)$ est donnée par : $E(X) = \int_a^b x\, f(x)\,\mathrm{d}x$.

**a)** Vérifier que la fonction $G$, définie sur l'intervalle [3 ; 4] par $G(x) = \ln(x-2) - \dfrac{x}{x-2}$, est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{(x-2)^2}$ sur cet intervalle.

**b)** En déduire la valeur exacte de $E(X)$, puis sa valeur arrondie au centième.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

## Exercice 4 – Candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématique (5 points)

**1.** On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) à l'inconnue $z$ :

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right) z^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right) z + 8\mathrm{i} = 0 \quad \text{(E)}.$$

**a)** Montrer que le nombre $-2\mathrm{i}$ est une solution de l'équation (E).

**b)** Vérifier que, pour tout nombre complexe $z$, on a :

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right) z^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right) z + 8\mathrm{i} = \left(z + 2\mathrm{i}\right)\left(z^2 - 2\sqrt{3}\, z + 4\right).$$

**c)** Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

**d)** Écrire les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

*Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine* O.

**2.** On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2\mathrm{i}$, $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

**a)** Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

**b)** Placer ces points sur une figure que l'on complètera par la suite.

**c)** On note D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe $z_{\mathrm{L}}$ du point L tel que AODL soit un parallélogramme.

**3.** On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x, y)$ et $(x', y')$ sont orthogonaux si et seulement si $x\,x' + y\,y' = 0$.

**a)** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives $z$ et $z'$.
Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\,\overline{z'}$ est un imaginaire pur.

**b)** À l'aide de la question **3.a)**, démontrer que le triangle AOL est rectangle en L.