Math93.com

Baccalauréat 2023 - Spécialité Maths
Correction Centres Étrangers

Sujet 1 - 13 Mars 2023

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

BAC 2023

Tous les sujets et corrigés de 2023 sont disponibles ici : www.math93.com

Remarque

Dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

Exercice 1. Thèmes : Suites, fonctions, Loi Binomiale, Algorithme (dichotomie) 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n entier naturel par

$$u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}.$$

Cette suite :

a. diverge vers $+\infty$

b. converge vers $\dfrac{2}{5}$

c. converge vers 0

d. converge vers $\dfrac{1}{3}$.

Corrigé (Réponse c.)

Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n} = \frac{2^n \times \left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{5^n \times \left(\frac{1}{5^n}+1\right)} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

Or, les nombres : $\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{5}$ étant tous strictement compris entre -1 et 1, on en déduit que les suites géométriques ayant

ces nombres pour raison convergent vers 0.

$$\lim_{n\to 0}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 = \lim_{n\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to 0}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Par limite de somme et de quotient, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n} = 1$$

puis, par limite du produit :

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n} = 1\\[2ex] \lim\limits_{n\to 0}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0\end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n} = 0}$$

Question 2

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2\ln x$.
L'expression de la fonction dérivée de f est :

a. $f'(x) = 2x\ln x$.
b. $f'(x) = x(2\ln x + 1)$.
c. $f'(x) = 2$.
d. $f'(x) = x$.

Corrigé (Réponse b.)

$$f : \begin{cases}]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x) = x^2\times\ln(x)\end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x\in]0\,;\,+\infty[\,;\ f(x) = u(x)\times v(x)\ :\ \begin{cases}u(x) = x^2 & ; & u'(x) = 2x\\ v(x) = \ln(x) & ; & v'(x) = \dfrac{1}{x}\end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in]0\,;\,+\infty[,\ \ f'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x)\\ f'(x) &= 2x\times\ln(x) + x^2\times\frac{1}{x}\\ f'(x) &= 2x\ln(x) + x\end{aligned}$$

Soit la réponse b.

$$\boxed{\forall x\in]0\,;\,+\infty[\,;\ f'(x) = x\big(2\ln(x)+1\big)}$$

Question 3

On considère une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de h	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

On note H la primitive de h définie sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
Elle vérifie la propriété :

a. H est positive sur $]-\infty\,;\,0]$.
b. H est croissante sur $]-\infty\,;\,1]$.
c. H est négative sur $]-\infty\,;\,1]$.
d. H est croissante sur $\mathbb{R}$.

Corrigé (Réponse a.)

D'après le tableau de variation, la fonction h est négative sur $]-\infty\,;\,1]$ et positive sur $[1\,;\,+\infty[$.
La fonction H étant une primitive de h sur $\mathbb{R}$, cela équivaut à dire que h est la fonction dérivée de H.
On obtient les variations suivantes avec par ailleurs $H(0)=0$ puisque H s'annule en 0 :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $H'(x)=h(x)$		$-$	0	$+$			
Variations de H	↘		0	↗	$H(1)$		

Cela implique donc que H est à valeurs positives sur $]-\infty\,;\,0[$.

©ISSN 2272-5318

Question 4

Soit deux réels a et b avec $a < b$.
On considère une fonction f définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et qui s'annule en un réel α.
Parmi les propositions suivantes, la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de α à $0,001$ est :

a.
```
def racine(a, b):
    while abs(b - a) >= 0.001:
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return m
```

b.
```
def racine(a, b):
    m = (a + b)/2
    while abs(b - a) >= 0.001:
        if f(m) < 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return m
```

c.
```
def racine(a, b):
    m = (a + b)/2
    while abs(b - a) <= 0001:
        if f(m) < 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return m
```

d.
```
def racine (a, b):
    while abs (b - a) >= 0.001:
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return m
```

Corrigé (Réponse d.)

Il s'agit d'un algorithme de dichotomie.

- Dans la boucle while, il faut que l'écart soit supérieur à $0,001$ pour continuer cette boucle.
  On exclut donc la proposition c.
- La fonction est croissante sur $[a\ ;\ b]$. Par conséquent si $f(m) < 0$ alors a prend la valeur de m car la solution est sur l'intervalle $[m\ ;\ b]$. On exclut la proposition a.
- Il faut recalculer la variable m à chaque tour de boucle : on exclut la proposition b.
- Le seul algorithme correcte est le d.

Question 5

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 7 sont bleues et les autres vertes.
On effectue trois tirages successifs avec remise. La probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes est :

a. $\left(\frac{7}{10}\right)^2 \times \frac{3}{10}$

b. $\left(\frac{7}{10}\right)^2$

c. $\binom{10}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$

d. $\binom{3}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$

Corrigé (Réponse d.)

Ici, nous avons :

- une expérience à deux issues (choisir une boule dans l'urne), le succès est « obtenir une boule verte », de probabilité $p = \frac{3}{10}$;
- cette expérience est répétée trois fois (trois tirages) de façon identique et indépendante (tirages avec remise), donc $n = 3$ répétitions ;
- dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{3}{10}$, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Avec ces éléments, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3\,;\,\frac{3}{10}\right)$.
L'évènement « obtenir deux boules vertes » correspond à $(X = 2)$ dans ce contexte, et par propriété, on a :

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \binom{3}{2} \times p^2 \times (1-p)^{3-2} \\ &= \binom{3}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2}$$

Exercice 2. Thèmes : Probabilités et suites — 6 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Partie A

On estime que :

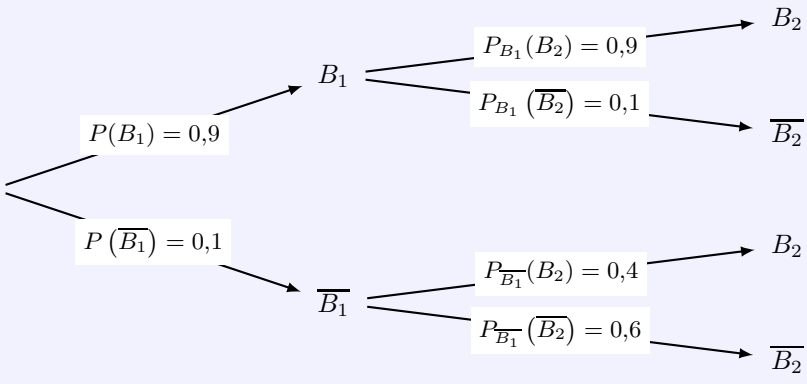
- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel.
On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état.
On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

Corrigé

- On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service ».
  Si n est un entier naturel, la phrase « lorsque la trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9 » correspond à :
  $$P_{B_n}(B_{n+1}) = 0,9$$
- La phrase « lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$. » correspond à : se traduit par :
  $$P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = 0,4$$
- Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état soit $p_0 = 1$.
  On a donc
  $$p_1 = P(B_1) = P(B_0) \times P_{B_0}(B_1) = 1 \times 0,9 = 0,9$$
  On a
  $$\boxed{p_1 = 0,9}$$
- Pour déterminer p_2, traçons un arbre :



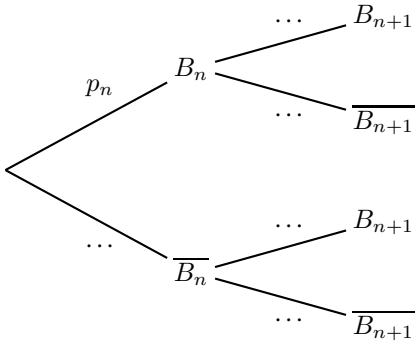
©ISSN 2272-5318

Les évènements B_1 et $\overline{B_1}$ formant une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales :

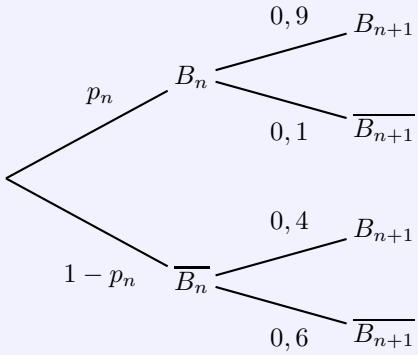
$$\begin{aligned}
P(B_2) &= P(B_2 \cap B_1) + P\left(B_2 \cap \overline{B_1}\right)\\
P(B_2) &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P\left(\overline{B_1}\right) \times P_{\overline{B_1}}(B_2)\\
P(B_2) &= 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}4\\
P(B_2) &= 0{,}81 + 0{,}04\\
P(B_2) &= \underline{0{,}85}
\end{aligned}$$

Ce calcul confirme bien que l'on a : $p_2 = 0,85$.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



Corrigé



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

Corrigé

Les évènements B_n et $\overline{B_n}$ partitionnent l'univers, la loi des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(B_{n+1})\\
&= P\left(B_n \cap B_{n+1}\right) + P\left(\overline{B_n} \cap B_{n+1}\right)\\
&= p_n \times 0,9 + (1-p_n) \times 0,4\\
&= 0,9p_n + 0,4 - 0,4p_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4}$$

4.

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0,8$.

Corrigé

Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 0$ la propriété

$$P(n) \ : \ p_n \geqslant 0,8$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque : $p_0 = 1 > 0,8$
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.

Remarque

On admet que :

$$p_n \geqslant 0,8$$

et

$$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$$

Et on cherche à montrer que :

$\boxed{p_{n+1} \geqslant 0,8}$ à prouver

On applique l'hypothèse de récurrence qui implique que $P(n)$ soit vérifiée et donc que $p_n \geqslant 0,8$.

$$\begin{aligned} p_n \geqslant 0,8 &\implies 0,5 \times p_n \geqslant 0,5 \times 0,8 = 0,4 \quad \text{car } 0,5 > 0 \\ &\implies \underbrace{5p_n + 0,4}_{p_{n+1}} \geqslant 0,4 + 0,4 \\ &\implies p_{n+1} \geqslant 0,8 \end{aligned}$$

On a alors montré que $p_{n+1} \geqslant 0,8$ et donc que $P(n+1)$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.

- **Conclusion**
  On a montré que $P(0)$ est vraie. De plus, la propriété est héréditaire. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$$\boxed{p_n \geqslant 0,8}$$

4. b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?

Corrigé

En assimilant les probabilités à des proportions, l'entreprise peut communiquer en annonçant qu'au moins 80 % de son parc de trottinettes est toujours en bon état.

5.

5. a. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

Corrigé

Les suites (p_n) et (u_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(p_n) : \begin{cases} p_0 &= 1 \\ p_{n+1} &= 0.5 \times p_n + \ 0{,}4 \end{cases} \quad \Big| \quad (u_n) : \begin{cases} u_0 & \\ u_n &= p_n - 0{,}8 \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$ on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - 0{,}8 \\
u_{n+1} &= (0{,}5\, p_n + 0{,}4) - 0{,}8 \\
u_{n+1} &= 0{,}5 \times p_n - 0{,}4 \\
u_{n+1} &= 0{,}5 \times \left(p_n + \frac{-0{,}4}{0{,}5}\right) \\
u_{n+1} &= 0{,}5 \times (p_n - 0{,}8) \\
u_{n+1} &= 0{,}5 \times u_n
\end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$, et de premier terme $u_0 = 0{,}2$ puisque :

$$\begin{aligned}
u_0 &= p_0 - 0{,}8 \\
u_0 &= 1 - 0{,}8 \\
u_0 &= 0{,}2
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(u_n) : \begin{cases} u_0 &= 0{,}2 \\ u_{n+1} &= 0{,}5 \times u_n \end{cases} ;\ \forall n \geqslant 0}$$

5. b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.

Corrigé

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$, et de premier terme $u_0 = 0{,}2$ donc son terme général est

$$\forall n \geqslant 0\ ;\ u_n = u_0 \times (q)^{n-0}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \geqslant 0\ ;\ u_n = 0{,}2 \times (0{,}5)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$u_n = p_n - 0{,}8$$

On peut en déduire l'expression :

$$p_n = u_n + 0{,}8$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0\ ;\ p_n = 0{,}2 \times (0{,}5)^n + 0{,}8}$$

5. c. En déduire la limite de la suite (p_n).

Corrigé

La raison de la suite géométrique u est comprise entre -1 et 1, strictement, donc la suite u converge vers 0.
La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$ donc $p_n = u_n + 0,8$.
Par limite de la somme, on en déduit que la suite p converge vers 0,8.

Partie B

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

- l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres ;
- la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à $0,8$.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.
Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

Corrigé

Ici, nous avons :

- une expérience à deux issues (choisir une trottinette dans le parc de l'entreprise), le succès est « choisir une trottinette en bon état », de probabilité $p = 0,8$;
- cette expérience est répétée quinze fois (on constitue un lot de 15 trottinettes) d'une façon assimilable à une répétition identique et indépendante (le prélèvement des 15 trottinettes est assimilable à un tirage avec remise), donc $n = 15$ répétitions ;
- dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 15$ et $p = 0,8$, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (le nombre de trottinettes en bon état dans le lot).

De ce fait X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(15\ ;\ 0,8)$.

2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.

Corrigé

La probabilité demandée est $P(X = 15)$. Par propriété, on a :

$$P(X = 15) = \binom{15}{15} \times 0,8^{15} \times 0,2^{0} = 0,8^{15}$$

La probabilité que les quinze trottinettes soient en bon état est donc de $0,8^{15}$ (ici, le sujet ne précise pas de consigne d'arrondi, donc on donne la valeur exacte. La valeur approchée au dix-millième près est 0,0352.

3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.

Corrigé

La probabilité demandée est $P(X \geqslant 10)$.

Selon le modèle de calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de ce résultat directement, ou utiliser le fait que :

$$\boxed{P(X \geqslant 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leqslant 9) \approx 0,9389}$$

4. On admet que $E(X) = 12$. Interpréter le résultat.

Corrigé

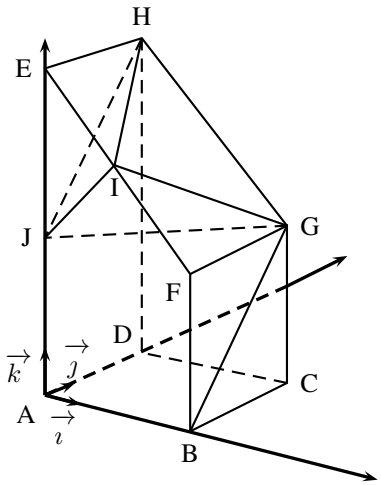
Pour une variable aléatoire suivant la loi binomiale, on a $E(X) = np = 15 \times 0,8 = 12$ (non demandée). Cela signifie qu'en moyenne, dans un lot de 15 trottinettes, 12 sont en bon état.

Exercice 3. Thèmes : Espace — 6 points

On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.
On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AB}}, \quad \vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}}, \quad \vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{\text{AE}}.$$

De plus on a $\overrightarrow{\text{BF}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AE}}$.
On note I le milieu du segment [EF].
On note J le milieu du segment [AE].



1. Donner les coordonnées des points I et J.

Corrigé

Dans le repère $\left(\text{A} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on a les coordonnées suivantes pour les sommets du prisme droit :

$\text{A}(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$	$\text{B}(4\ ;\ 0\ ;\ 0)$	$\text{C}(4\ ;\ 4\ ;\ 0)$	$\text{D}(0\ ;\ 4\ ;\ 0)$
$\text{E}(0\ ;\ 0\ ;\ 8)$	$\text{F}(4\ ;\ 0\ ;\ 4)$	$\text{G}(4\ ;\ 4\ ;\ 4)$	$\text{H}(0\ ;\ 4\ ;\ 8)$

I étant le milieu de [EF], on a $\text{I}\left(\frac{x_\text{E}+x_\text{F}}{2} ; \frac{y_\text{E}+y_\text{F}}{2} ; \frac{z_\text{E}+z_\text{F}}{2}\right)$, soit $\boxed{I(2\ ;\ 0\ ;\ 6)}$.

J étant le milieu de [AE], on a de même : $\boxed{J(0\ ;\ 0\ ;\ 4)}$.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).

Corrigé

On a :

$$\overrightarrow{\text{IG}}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{IJ}}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$$

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer les produits scalaires à l'aide des coordonnées :

- $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\text{IG}}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} = -1\times 2 + 1\times 4 + 1\times(-2) = -2+4-2 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{IG}}$.
- $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\text{IJ}}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix} = -1\times(-2) + 1\times 0 + 1\times(-2) = 2+0-2 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{IJ}}$.

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IGJ) : c'est donc un vecteur normal au plan.

2. b. Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).

Corrigé

Propriété 1

Soit vecteur $\vec{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 1 :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (IGJ) \iff \overrightarrow{GM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-4 \\ z-4 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (IGJ) \iff -(x-4)+(y-4)+(z-4)=0$$
$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (IGJ) \iff -x+y+z-4=0$$

$$\boxed{(IGJ) \ : \ -x+y+z-4=0}$$

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.

Corrigé

La droite d est orthogonale au plan (IGJ) donc un vecteur directeur de d est le vecteur $\vec{n}$, normal au plan (IGJ).

La droite d passant par le point $H\,(0\,;\,4\,;\,8)$ et de vecteur directeur $\vec{n}\ (-1\,;\,1\,;\,1)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{HM}$ soit colinéaire à $\vec{n}$. On a alors :

$$d = \left\{ M(x\,;\,y\,;\,z)\,;\ \overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-4 \\ z-8 \end{pmatrix} = t\,\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite d est donc :

$$\boxed{d \ : \ \begin{cases} x = -t \\ y = t+4 \\ z = t+8 \end{cases} , \ t \in \mathbb{R}}$$

4. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).

Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{4}{3}\,;\,\frac{16}{3}\right)$.

Corrigé

Si L est le projeté orthogonal de H sur (IGJ), cela veut dire que la droite (HL) est orthogonale au plan (et passe par H), et donc que la droite (HL) est la droite d. Comme L est un point du plan, c'est donc le seul point de d sur le plan.

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de d soit un point de (IGJ) :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t + 4 \\ z = t + 8 \\ -x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M_t \in (\text{IGJ}) &\iff -(-t) + (4+t) + (8+t) - 4 = 0 \\ &\iff 3t + 8 = 0 \\ &\iff t = \frac{-8}{3} \end{aligned}$$

Donc $M_{\frac{-8}{3}}$ a comme coordonnées $\text{L}\left(-\frac{-8}{3}\,;\,4+\frac{-8}{3}\,;\,8+\frac{-8}{3}\right)$.

Donc le point L est bien le point de coordonnées

$$\boxed{L\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{4}{3}\,;\,\frac{16}{3}\right)}$$

5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).

Corrigé

Par définition, la distance d'un point à un plan est la distance entre le point et son projeté orthogonal sur le plan, donc on cherche HL.

$$\begin{cases} L\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{4}{3}\,;\,\frac{16}{3}\right) \\ H(0\,;\,4\,;\,8) \end{cases} \quad \Longrightarrow \overrightarrow{HL} \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Comme on travaille dans un repère orthonormé :

$$\begin{aligned} HL &= \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{64}{3}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

La distance de H au plan (IGJ) est donc en unité de longueur :

$$\boxed{HL = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ u.l.}}$$

6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.

Corrigé

$$\overrightarrow{\text{IG}}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{IJ}}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$$

Calculons :

$$\overrightarrow{\text{IG}}\cdot\overrightarrow{\text{IJ}} = 2\times(-2)+4\times 0+(-2)\times(-2) = -4+0+4 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{IG}}$ et $\overrightarrow{\text{IJ}}$ sont donc orthogonaux (et non nuls) donc les droites qu'ils dirigent, (IG) et (IJ) sont orthogonales (et perpendiculaires, car sécantes en I) : le triangle IGJ est donc rectangle en I.

7. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

Corrigé

Pour calculer le volume, on choisira IGJ comme base et donc la hauteur correspondante est la distance du quatrième sommet (H) au plan (IGJ) soit $HL = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$.

$$\overrightarrow{\text{IG}}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{IJ}}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}\text{IG} = \sqrt{2^2+4^2+(-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\\ \text{IJ} = \sqrt{(-2)^2+0+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\end{cases}$$

L'aire du triangle IGJ est donc :

$$\mathcal{A}_{\text{IGJ}} = \frac{\text{IG}\times\text{IJ}}{2} = \frac{2\sqrt{6}\times 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Le volume du tétraèdre est donc (en unités de volume) :

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{\text{IGJ}}\times HL = \frac{1}{3}\times 4\sqrt{3}\times\frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{32}{3}}$$

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3}\times(\text{aire de la base})\times\text{hauteur}.$$

Exercice 4. Thèmes : Vrai/Faux Fonctions — 3 points

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2}$$

où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous.
Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

Affirmation 1

- **Affirmation 1** : « La population augmente en permanence ».

Corrigé (Fausse)

Étudions les variations de la fonction f.
f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Elle est de la forme $(k - \mathrm{e}^{\,u})$ donc de dérivée $(-u'\,\mathrm{e}^{\,u})$ avec :
Pour tout t réel positif, on pose :

$$u(t) = -0,5t^2 + t + 2 \quad \text{et} \quad u'(t) = -t + 1$$

On a donc, pour tout réel t positif :

$$f'(t) = 0 - (-t+1)\,\mathrm{e}^{\,-0,5t^2+t+2} = (t-1)\,\mathrm{e}^{\,-0,5t^2+t+2}$$

La fonction exp étant à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, $f'(t)$ est du signe de $(t-1)$. On obtient facilement :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$f(0) = \mathrm{e}^{\,3} - \mathrm{e}^{\,2}$	↘	$f(1)$	↗	

f est donc strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. Il est donc faux de dire que la population augmente en permanence car au cours de la première heure, la population décroit, strictement.

©ISSN 2272-5318

Affirmation 2

- **Affirmation 2** : « À très long terme, la population dépassera 21 000 bactéries ».

Corrigé (Fausse)

La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2} > 0 &\implies -\mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2} < 0\\ &\implies \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2} < \mathrm{e}^3\\ &\implies f(t) < \mathrm{e}^3 \approx 20,086 \text{ (arrondi par excès)}\end{aligned}$$

Donc la fonction f est majorée par 20,086, ce qui s'interprète en disant que la population restera inférieure à 20,086 milliers d'individus, soit 20 086 bactéries : la population ne dépassera donc jamais 21 000.

Affirmation 3

- **Affirmation 3** : « La population de bactéries aura un effectif de 10 000 à deux reprises au cours du temps ».

Corrigé (Vraie)

Une population de bactéries de 10 000 individus à l'instant t, correspond à $f(t) = 10$.
On cherche donc à savoir combien d'antécédents 10 a par la fonction f. On a vu que :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$f(0) \approx 12.696 > 10$	↘	$f(1) \approx 7.903 < 10$	↗	

$$f(t) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2}$$

$$f(0) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^2 \approx 12,696 > 10 \text{ et } f(1) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{2,5} \approx 7,903 < 10$$

- Étudions la limite de f en $+\infty$.
  Pour $t > 0$ on a (t non nul, c'est mieux pour factoriser par t^2 !) :

$$-0,5t^2 + t + 2 = t^2\left(-0,5 + \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}\right)$$

Soit par limite de quotient, somme et produit de fonctions de références. :

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 = +\infty\\ \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-0,5 + \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}\right) = -0,5\end{cases} \implies \lim_{t\to+\infty} -0,5t^2 + t + 2 = -\infty$$

©ISSN 2272-5318

Par composition, en posant $y = -0,5t^2 + t + 2$, on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} -0,5t^2+t+2 = -\infty \\ \lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{\,y} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{\,-0,5t^2+t+2} = \lim_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{\,y} = 0$$

Finalement, par limite de la somme :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2}\right) = \mathrm{e}^{\,3}}$$

Remarque : La courbe représentative de f présente une asymptote d'équation $y = e^{\,3}$ quand t tend vers $+\infty$.

- Application du TVI.

x	0	α	1	β	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$f(0) \approx 12.696 > 10$	10	$f(1) \approx 7.903 < 10$	10	$\mathrm{e}^{\,3} \approx 20.086$

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

***Remarque** : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- Application du corollaire sur $[0\ ;\ 1]$:
  - La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$;
  - Le réel $k = 10$ est compris entre $f(1) = \mathrm{e}^{\,3} - \mathrm{e}^{\,2},5 \approx 7,903$ et $f(0) = \mathrm{e}^{\,3} - \mathrm{e}^{\,2} \approx 12,696$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x) = 10$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
- Application du corollaire généralisé sur $[1\ ;\ +\infty[$:
  - La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$;
  - Le réel $k = 10$ est compris entre $f(1) = \mathrm{e}^{\,3} - \mathrm{e}^{\,2},5 \approx 7,903$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}^{\,3} \approx 20,086$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires généralisé*, l'équation $f(x) = 10$ admet une solution unique β sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

Finalement, l'équation $f(t) = 10$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+$ et donc il y a exactement deux instants où la population de bactéries aura un effectif de 10 000 individus.

Fin du devoir