Math93.com

Baccalauréat 2023 - Spécialité Maths
Correction Polynésie

Sujet 1 - 13 Mars 2023

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

BAC 2023

Tous les sujets et corrigés de 2023 sont disponibles ici : www.math93.com

Remarque

Dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

BARÈME (sur 20 points)			
Exercice 1	:	Probabilités	4 points
Exercice 2	:	Espace	5 points
Exercice 3	:	Vrai/Faux : fonction exponentielle, algorithmique	5 points
Exercice 4	:	Suites et fonctions	6 points

Exercice 1. Thèmes : Probabilités — 4 points

Les parties A *et* B *peuvent être traitées indépendamment*

Les utilisateurs de vélo d'une ville sont classés en deux catégories disjointes :

- ceux qui utilisent le vélo dans leurs déplacements professionnels ;
- ceux qui utilisent le vélo uniquement pour leurs loisirs.

Un sondage donne les résultats suivants :

- 21 % des utilisateurs ont moins de 35 ans.

  Parmi eux, 68 % utilisent leur vélo uniquement pour leurs loisirs alors que les autres l'utilisent dans leurs déplacements professionnels ;
- parmi les 35 ans ou plus, seuls 20 % utilisent leur vélo dans leurs déplacements professionnels, les autres l'utilisent uniquement pour leurs loisirs.

On interroge au hasard un utilisateur de vélo de cette ville.
Dans tout l'exercice on considère les évènements suivants :

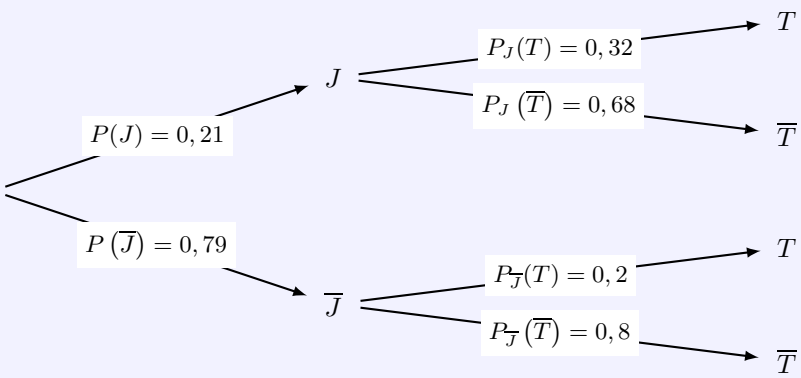
- J : « la personne interrogée a moins de 35 ans » ;
- T : « la personne interrogée utilise le vélo dans ses déplacements professionnels » ;
- $\overline{J}$ et $\overline{T}$ sont les évènements contraires de J et T.

Partie A

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

Corrigé

On a d'après les données :



Donc

$$p(J \cap T) = p(J) \times p_J(T) = 0,21 \times 0,32 = \underline{0,067\,2}$$

©ISSN 2272-5318

2. Calculer la valeur exacte de la probabilité de T.

Corrigé

Les évènements J et $\overline{J}$ formant une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(T) &= P(T \cap J) + P\left(T \cap \overline{J}\right)\\
P(T) &= P(J) \times P_J(T) + P\left(\overline{J}\right) \times P_{\overline{J}}(T)\\
P(T) &= 0{,}21 \times 0{,}32 + 0{,}79 \times 0{,}2\\
P(T) &= 0{,}0672 + 0{,}158\\
P(T) &= \underline{0{,}2252}
\end{aligned}$$

3. On considère à présent un habitant qui utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.
Démontrer que la probabilité qu'il ait moins de 35 ans est $0,30$ à 10^{-2} près.

Corrigé

On cherche :

$$\begin{aligned}
p_T(J) &= \frac{p(T \cap J)}{p(T)}\\
&= \frac{p(J \cap T)}{p(T)}\\
&= \frac{0{,}067\,2}{00{,}225\,2} \approx 0,298
\end{aligned}$$

La probabilité qu'il ait moins de 35 ans est $0,30$ à 10^{-2} près.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement aux personnes utilisant leur vélo dans leurs déplacements professionnels.

On admet que 30 % d'entre elles ont moins de 35 ans.
On sélectionne au hasard parmi elles un échantillon de 120 personnes auxquelles on va soumettre un questionnaire supplémentaire.
On assimile la sélection de cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.

On demande à chaque individu de cet échantillon son âge.

X représente le nombre de personnes de l'échantillon ayant moins de 35 ans.

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

Corrigé

Modélisation
Il y a répétition de $n = 120$ événements indépendants et identiques (on tire au hasard une personne).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p = 0,3$ quand la personne a moins de 35 ans ;
- et échec de probabilité $1 - p = 0{,}7$ sinon.

Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 120$ épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre $p = 0,3$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n = 120$ et $p = 0,3$.
On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathcal{B}\left(120\ ;\ 0,3\right) \text{ ou } X \sim \mathcal{B}\left(120\ ;\ 0,3\right).$$

2. Calculer la probabilité qu'au moins 50 utilisateurs de vélo parmi les 120 aient moins de 35 ans.

Corrigé

La calculatrice donne :

$$\boxed{p(X \geqslant 50) = 1 - p(X \leqslant 49) \approx 0{,}004}$$

©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Thèmes : Espace — 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormée $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.
On considère :

- d_1 la droite passant par le point H(2 ; 3 ; 0) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;
- d_2 la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 2k-3 \\ y &= k \\ z &= 5 \end{cases} \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui soit perpendiculaire aux droites d_1 et d_2.

1.

1. a. Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d_2.

Corrigé

Propriété 1 (Représentation paramétrique d'une droite de l'espace)

Soit un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ de l'espace. La droite (d) passant par le point $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est l'ensemble des point $M\,(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ce système d'équations est appelé **une représentation paramétrique de la droite (d)**.

L'équation paramétrique de d_2 montre qu'elle passe par le point de coordonnées $(-3\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et qu'elle admet (par exemple) comme vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

1. b. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

Corrigé

Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires car aucune des composantes de $\vec{u}$ n'est nulle alors que la troisième de $\vec{v}$ l'est. Donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

1. c. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

Corrigé

La droite (d_1) passe par le point H(2 ; 3 ; 0) et est de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Donc une représentation paramétrique de d_1 est

$$\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= 3-t \\ z &= t \end{cases} \quad ,t \in \mathbb{R}$$

Une représentation paramétrique de d_2 est

$$\begin{cases} x &= 2k-3 \\ y &= k \\ z &= 5 \end{cases} \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

On peut cherche un éventuel point d'intersection des deux droites en résolvant le système :

$$\begin{cases} x &= 2+t &= 2k-3 \\ y &= 3-t &= k \\ z &= t &= 5 \end{cases}$$

Puisque $t = 5$, la première équation donne :

$$2+5 = 2k-3 \iff k = 5$$

Puisque $t = 5$, la deuxième équation donne :

$$3-5 = k \iff k = -2$$

Il y a donc incompatibilité.
Les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

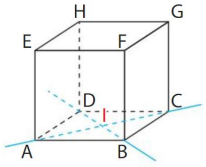
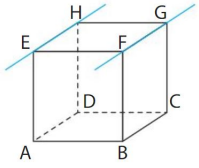
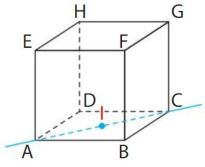
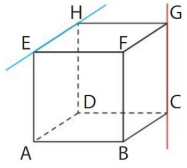
1. d. Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?

Corrigé

Les droites n'étant ni sécantes ni parallèles, elles ne sont pas coplanaires.

Propriété 2

- **Deux droites** sont soit **coplanaires**, soit **non coplanaires**.
- Si elles sont coplanaires, elles sont soit sécantes soit parallèles.

Droites coplanaires (dans un même plan)			Droites non coplanaires
Droites sécantes	Droites parallèles		
 Les droites (AC) et (DB) sont sécantes en I.	 Les droites (EH) et (FG) sont strictement parallèles.	 Les droites (AI) et (AC) sont confondues.	 Les droites (EH) et (GC) sont non coplanaires.

©ISSN 2272-5318

2.

2. a. Vérifier que le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Corrigé

On a :

$$\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=-1-2+3=0$$

De même :

$$\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=-2+2+0=0$$

Donc le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. b. On considère le plan P passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est :

$$5x+4y-z-22=0.$$

Démontrer que l'intersection du plan P et de la droite d_2 est le point M(3 ; 3 ; 5).

Corrigé

Un point commun au plan P et à la droite d_2 a ses coordonnées qui vérifient le système :

$$\begin{cases}x&=2k-3\\y&=k\\z&=5\\5x+4y-z-22&=0\end{cases}\iff\begin{cases}x&=2k-3\\y&=k\\z&=5\\5(2k-3)+4k-5-22&=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x&=2k-3\\y&=k\\z&=5\\10k-15+4k-5-22&=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x&=2k-3\\y&=k\\z&=5\\k&=3\end{cases}\iff\begin{cases}x&=3\\y&=3\\z&=5\\k&=3\end{cases}$$

Le point commun au plan P et à la droite d_2 est le point $\boxed{M(3\ ;\ 3\ ;\ 5)}$.

3. Soit Δ la droite de vecteur directeur $\vec{w}$ passant par le point M.
Une représentation paramétrique de Δ est donc donnée par :

$$\begin{cases} x &= -r+3 \\ y &= 2r+3 \\ z &= 3r+5 \end{cases} \quad \text{où } r \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

3. a. Justifier que les droites Δ et d_1 sont perpendiculaires en un point L dont on déterminera les coordonnées.

Corrigé

- Δ et d_1 ont leurs vecteurs directeurs $\vec{w}$ et $\vec{u}$ orthogonaux donc ces droites sont orthogonales.
- Pour savoir si elles sont sécantes, on cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} x=-r+3 \\ y=2r+3 \\ z=3r+5 \\ x=2+t \\ y=3-t \\ z=t \end{cases} \iff \begin{cases} x=-r+3 \\ y=2r+3 \\ z=3r+5 \\ -r+3=2+t \\ 2r+3=3-t \\ 3r+5=t \end{cases} \iff \begin{cases} x=-r+3 \\ y=2r+3 \\ z=3r+5 \\ t=3r+5 \\ -r+3=2+3r+5 \\ 2r+3=3-3r-5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-r+3 \\ y=2r+3 \\ z=3r+5 \\ t=3r+5 \\ -4r=4 \\ 5r=-5 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-r+3 \\ y=2r+3 \\ z=3r+5 \\ r=-1 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r=-1 \\ t=2 \\ x=4 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$$

Les droites Δ et d_1 sont donc sécantes au point L(4 ; 1 ; 2)

3. b. Expliquer pourquoi la droite Δ est solution du problème posé.

Corrigé

- Position du problème : Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui soit perpendiculaire aux droites d_1 et d_2.
- La droite Δ est la droite de vecteur directeur $\vec{w}$ passant par le point M. Or le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ (un vecteur directeur de (d_1)) et $\vec{v}$ (un vecteur directeur de (d_2)) d'après la question 2.a.
  Donc la droite Δ est orthogonale aux droites d_1 et d_2.
  Reste à savoir si elle leur est perpendiculaire.
- La droite Δ est perpendiculaire à (d_1) en $L(4\ ;\ 1\ ;\ 2)$ d'après la question **3.a.**
- Le point $M(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$ de la droite Δ appartient aussi à (d_2). En effet il suffit de prendre $k=3$ dans l'équation paramétrique de (d_2)
  Donc Δ est perpendiculaire à (d_2)
- Conclusion : On a trouvé une droite Δ perpendiculaire commune aux deux droites d_1 et d_2.

Exercice 3. Thèmes : Vrai/Faux : fonction exponentielle, algorithmique — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Affirmation :** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$ est convexe.

Corrigé

f est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a pour tout réel x :

$$\begin{cases} f'(x) = \mathrm{e}^x - 1 \\ f''(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

On sait que pour tout réel x on a : $\mathrm{e}^x > 0$. Donc $f''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et f est convexe sur $\mathbb{R}$.
L'affirmation est vraie.

2. **Affirmation :** L'équation $(2\mathrm{e}^x - 6)(\mathrm{e}^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans $\mathbb{R}$.

Corrigé

Pour x réel :

$$\mathrm{e}^x > 0 \Longrightarrow (\mathrm{e}^x + 2) > 2 \text{ et donc } (\mathrm{e}^x + 2) \neq 0$$

De ce fait :

$$\begin{aligned} (2\mathrm{e}^x - 6)(\mathrm{e}^x + 2) = 0 &\iff (2\mathrm{e}^x - 6) = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^x = 3 \\ &\iff x = \ln 3 \end{aligned}$$

L'équation $(2\mathrm{e}^x - 6)(\mathrm{e}^x + 2) = 0$ admet donc $\ln(3)$ comme unique solution dans $\mathbb{R}$.
L'affirmation est vraie

3. **Affirmation :**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x - x} = 0.$$

Corrigé

On a pour tout réel x :

$$\frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x - x} = \frac{\mathrm{e}^{2x}\left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1 - x\mathrm{e}^{-x}\right)} = \mathrm{e}^x \frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\right)}{\left(1 - x\mathrm{e}^{-x}\right)}$$

- Au numérateur on sait que :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - \mathrm{e}^{-2x} = 1$$

- Au dénominateur :

$$x\mathrm{e}^{-x} = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$

et l'on sait que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - x\mathrm{e}^{-x} = 1$$

Donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-2x}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-x\mathrm{e}^{-x}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x}=+\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{x}-x}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-2x}\right)}{\left(1-x\mathrm{e}^{-x}\right)}=+\infty$$

L'affirmation est fausse.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(6x+5)\mathrm{e}^{3x}$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=(2x+1)\mathrm{e}^{3x}+4$$

Affirmation : F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 5 quand $x=0$.

Corrigé

La fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$$F'(x)=2\mathrm{e}^{3x}+3(2x+1)\mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^{3x}(2+6x+3)=(6x+5)\mathrm{e}^{3x}=f(x)$$

D'autre part $F(0)=1\mathrm{e}^{0}+4=1+4=5$

F est donc la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 5 quand $x=0$, l'affirmation est vraie.

5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre.
On rappelle que `len`(L) représente la longueur de la liste L.

```
def mystere(L) :
    S = 0
    for i in range(len(L))
        S = S+ L[i]
    return S / len(L)
```

Affirmation : L'exécution de `mystere`([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5]) renvoie 50.

Corrigé

La fonction calcule la moyenne des termes de la liste soit :

$$\frac{1+9+\ldots+5}{10}=\frac{50}{10}=5$$

L'affirmation est fausse.

©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Thèmes : Suites et fonctions — 6 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1.

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

Corrigé

Initialisation : On a bien $u_0 = 2 \times 0,9^0 - 3 = 2 - 3 = -1$: la relation est vraie au rang 0 ;

Hérédité On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

Alors par définition de la suite

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$$

Et en appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,9\left(2 \times 0,9^n - 3\right) - 0,3 \\ &= 2 \times 0,9^{n+1} - 2,7 - 0,3 \\ &= 2 \times 0,9^{n+1} - 3 \end{aligned}$$

La relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 2 \times 0,9^n - 3}$.

1. b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leqslant -1$.

Corrigé

On a pour tout entier n :

$$\begin{aligned} 0 < 0,9 < 1 &\Longrightarrow 0 < 0,9^n < 1 \\ &\Longrightarrow 2 \times 0 < 2 \times 0,9^n < 2 \times 1 \\ &\Longrightarrow 0 < 2 \times 0,9^n < 2 \\ &\Longrightarrow 0 - 3 < 2 \times 0,9^n - 3 < 2 - 3 \end{aligned}$$

Soit pour tout entier n : $\boxed{-3 < u_n < -1}$.

1. c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Corrigé

On a pour tout entier n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 \times 0,9^{n+1} - 3 - \left(2 \times 0,9^n - 3\right) \\ &= 2 \times 0,9^{n+1} - 2 \times 0,9^n \\ &= 2 \times 0,9^n\left(0,9 - 1\right) \\ &= 2 \times 0,9^n\left(-0,1\right) \end{aligned}$$

Or pour tout entier n, on a :

$$\begin{cases} 2 \times 0,9^n > 0 \\ -0,1 < 0 \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\times 0,9^n\left(-0,1\right)}_{u_{n+1} - u_n} < 0$$

©ISSN 2272-5318

. Conclusion : La suite (u_n) est donc décroissante.

1. d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

Corrigé

On a montré que : pour tout entier n :

$$-3 < u_n < -1$$

et que la suite (u_n) était décroissante.

La suite (u_n) donc décroissante et minorée par -3 converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant -3$.

D'autre part pour tout entier n :

$$u_n = 2 \times 0,9^n - 3$$

or puisque : $-1 < 0,9 < 1$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$$

On déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -3}$$

La suite (u_n) converge vers -3.

2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\ ;\ -1]$ par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

2. a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)

x	-3		-2		-1
Variations de g	‖	$-\infty$ ↗	$g(-2)$	↘	1

Corrigé

- La fonction g est définie pour tout réel $x \in]-3\ ;\ -1]$ tel que :

$$0,5x + 1,5 < 0$$

Or on a :

$$-3 < x \leqslant -1 \Rightarrow -1,5 < 0,5x \leqslant -0,5 \Rightarrow 0 < 0,5x + 1,5 \leqslant 1$$

Donc la fonction est définie sur $]-3\ ;\ -1]$

- La fonction g est dérivable sur $]-3\ ;\ -1]$ et sur cet intervalle :

$$g'(x) = \frac{0,5}{0,5x + 1,5} - 1 = \frac{0,5 - 0,5x - 1,5}{0,5x + 1,5} = \frac{-0,5x - 1}{0,5x + 1,5}$$

On a vu ci-dessus que $0,5x + 1,5 > 0$, le signe de $g'(x)$ est donc celui de $-0,5x - 1$:

$$\begin{cases} g'(x) = 0 \iff -0,5x - 1 = 0 \iff -1 = 0,5x \iff -2 = x \\ g'(x) > 0 \iff -2 > x \\ g'(x) < 0 \iff -2 < x \end{cases}$$

Conclusion : la fonction est croissante sur $]-3\ ;\ -2]$ et décroissante sur $[-2\ ;\ -1]$.

- On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^+} 0,5x+1,5 = 0^+ \\ \lim\limits_{y\to 0^+} \ln(y) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to -3} \ln(0,5x+1,5) = -\infty$$

Donc

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -3} \ln(0,5x+1,5) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -3} (-x) = 3 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to -3} g(x) = -\infty}$$

- $g(-1) = \ln(-0,5+1,5) - (-1) = 0+1 = 1$;
- $g(-2) = \ln(-1+1,5) - (-2) = 2 + \ln 0,5 = 2 + \ln\dfrac{1}{2} = 2 - \ln 2 \approx ,31.$

2. b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

Corrigé

D'après le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $]-3\ ;\ -2]$, la fonction g est strictement croissante de moins l'infini à $g(-2) > 0$: il existe donc un réel unique $\alpha \in]-3\ ;\ -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne :

$g(-2,9) \approx -0{,}957$ et $g(-2,8) \approx -0{,}497\,4$, d'où $-2,9 < \alpha < -2,8$;

$g(-2,89) \approx -0{,}01$ et $g(-2,88) \approx 0,067$, d'où $-2,89 < \alpha < -2,88$;

$g(-2,889) \approx -0{,}002$ et $g(-2,888) \approx 0,006$, d'où $-2,889 < \alpha < -2,888$.

3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $\in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \ln(0,5u_n + 1,5).$$

3. a. En utilisant la formule donnée à la question **1. a.**, démontrer que la suite (v) est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.

Corrigé

Que que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(0,5u_n + 1,5)$ et en utilisant la formule du **1. a.** :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2 \times 0,9^n - 3$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln(0,5u_{n+1} + 1,5) - \ln(0,5u_n + 1,5) \\ &= \ln\left(0,9^{n+1} - 1,5 + 1,5\right) - \ln(0,9^n - 1,5 + 1,5) \\ &= \ln\left(0,9^{n+1}\right) - \ln(0,9^n) \\ &= (n+1)\ln(0,9) - n\ln(0,9) \\ &= \ln(0,9) \end{aligned}$$

La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\ln 0,9$ et de premier terme $v_0 = \ln(0,5u_0 + 1,5) = 0$.
De ce fait pour tout entier n :

$$\boxed{v_n = n\ln 0,9}$$

3. b. Soit n un entier naturel.

Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.

Corrigé

On a pour tout entier n :

$$\begin{aligned} u_n = v_n &\iff u_n = \ln(0,5u_n + 1,5) \\ &\iff \ln(0,5u_n + 1,5) - u_n = 0 \\ &\iff g(u_n) = 0 \end{aligned}$$

3. c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.

Corrigé

On a donc $g(v_n) = 0 \iff v_n = \alpha$, soit :

$$n \ln 0,9 = \alpha \iff n = \frac{\alpha}{\ln 0,9}$$

Or de $-2,889 < \alpha < -2,888$ on déduit (car $\ln 0,9 < 0$) :

$$\frac{-2,888}{\ln 0,9} < \frac{\alpha}{\ln 0,9} < \frac{-2,889}{\ln 0,9}$$

On aurait donc un entier n tel que

$$\frac{-2,888}{\ln 0,9} < n < \frac{-2,889}{\ln 0,9}$$

Or

$$\frac{-2,888}{\ln 0,9} \approx 27,41 \text{ et } \frac{-2,889}{\ln 0,9} \approx 27,42$$

Donc n ne peut être un naturel.

Conclusion : il n'existe pas k tel que $u_k = \alpha$.

3. d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.

Corrigé

On a vu que $u_n = \alpha \iff g(u_n) = 0 \iff u_n = v_n$. On vient de voir que ceci n'est pas possible : il n'existe pas $k \in \mathbb{N}$ tel que $v_k = u_k$.

Fin du devoir