



Math93.com

Baccalauréat 2025 - Spécialité Maths

Correction Nouvelle Calédonie

Sujet 2 - 21 Novembre 2025

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Mathématiques

Spécialité Mathématiques

Corrigé détaillé

Nouvelle Calédonie – 21 Novembre 2025

Sujet 2

SESSION

2025

DURÉE

4 heures

BARÈME

20 points

Exercice	Thème principal	Points
Exercice 1	Géométrie dans l'espace et dénombrement	4 points
Exercice 2		0 points
Exercice 3		0 points
Exercice 4		0 points
Total	Sujet complet	4 points



Bac 2026

Tous les sujets, corrigés, fichiers \LaTeX et bilans de notions de la session 2026 sont disponibles sur la page mère :

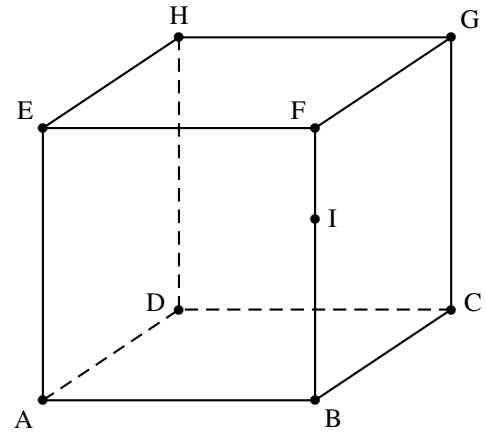
Annales Bac Maths 2026 – sujets, corrigés, fichiers \LaTeX et notions évaluées

Conseil : le jour de l'épreuve, il faut numéroter clairement les questions, justifier chaque réponse, soigner les calculs et encadrer les résultats importants.

**Exercice 1. Géométrie dans l'espace et dénombrement****4 points**

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1 et le point I défini par $\vec{FI} = \frac{1}{3}\vec{FB}$.
On pourra se placer dans le repère orthonormé de l'espace $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



Dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, on a :

$$A(0; 0; 0), \quad B(1; 0; 0), \quad C(1; 1; 0), \quad D(0; 1; 0),$$

$$E(0; 0; 1), \quad F(1; 0; 1), \quad G(1; 1; 1), \quad H(0; 1; 1).$$

De plus, comme $\vec{FI} = \frac{1}{3}\vec{FB}$, le point I appartient à la droite (FB) et on obtient :

$$I\left(1; 0; \frac{2}{3}\right).$$

1. On considère le triangle HAC.

Affirmation 1 : Le triangle HAC est un triangle rectangle.

**Corrigé****Distances dans un repère orthonormé de l'espace**

Dans un repère orthonormé de l'espace, si $M(x_M; y_M; z_M)$ et $N(x_N; y_N; z_N)$, alors :

$$MN^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2.$$

Pour montrer qu'un triangle est rectangle, on peut utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

On calcule les longueurs au carré des trois côtés du triangle HAC.

$$\begin{aligned} HA^2 &= (0 - 0)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 \\ &= 0 + 1 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{HA^2 = 2}$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= (1 - 0)^2 + (1 - 0)^2 + (0 - 0)^2 \\ &= 1 + 1 + 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{AC^2 = 2}$$



$$\begin{aligned} HC^2 &= (1-0)^2 + (1-1)^2 + (0-1)^2 \\ &= 1 + 0 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{HC^2 = 2}$$

Ainsi :

$$HA^2 = AC^2 = HC^2 = 2.$$

Les trois côtés du triangle HAC ont donc la même longueur. Le triangle HAC est un triangle équilatéral. Or un triangle équilatéral possède trois angles de mesure 60° . Il n'est donc pas rectangle.

L'affirmation 1 est fausse.

2. On considère les droites (HF) et (DI).

Affirmation 2 : Les droites (HF) et (DI) sont sécantes.



Corrigé



Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit d une droite passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et admettant pour vecteur directeur

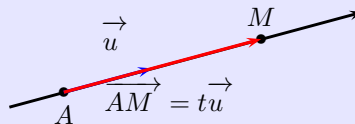
$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Un point $M(x; y; z)$ appartient à la droite d si, et seulement si, les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel t tel que :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}.$$

On obtient alors une représentation paramétrique de d :

$$d : \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$



Méthode

Pour montrer que deux droites de l'espace sont sécantes, on peut écrire une représentation paramétrique de chacune des deux droites, puis résoudre le système obtenu en identifiant les coordonnées.

- On détermine une représentation paramétrique de la droite (HF).



Pour la droite (HF) , on utilise le point $H(0; 1; 1)$ et le vecteur directeur \overrightarrow{HF} :

$$\overrightarrow{HF} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (HF) est donc :

$$(HF) : \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

- On détermine une représentation paramétrique de la droite (DI) .

Pour la droite (DI) , on utilise le point $D(0; 1; 0)$ et le vecteur directeur \overrightarrow{DI} :

$$\overrightarrow{DI} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ \frac{2}{3}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (DI) est donc :

$$(DI) : \begin{cases} x = s \\ y = 1-s \\ z = \frac{2}{3}s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

- On cherche si les deux droites ont un point commun.

On cherche s'il existe deux réels t et s tels que les deux représentations donnent le même point. On résout donc :

$$\begin{cases} t = s \\ 1-t = 1-s \\ 1 = \frac{2}{3}s \end{cases}$$

La troisième équation donne :

$$1 = \frac{2}{3}s \\ \Leftrightarrow s = \frac{3}{2}.$$

Comme $t = s$, on obtient aussi :

$$t = \frac{3}{2}.$$

Les deux droites ont donc un point commun. Ses coordonnées sont obtenues avec la droite (HF) :

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2}, \\ y &= 1 - \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}, \\ z &= 1. \end{aligned}$$

Les droites (HF) et (DI) sont donc sécantes en un point situé en dehors du cube, ce qui est possible puisque l'on considère les droites et non seulement les segments.

L'affirmation 2 est vraie.



3. On considère un réel α appartenant à l'intervalle $]0 ; \pi[$.

On considère le vecteur \vec{u} de coordonnées $\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \sin(\pi - \alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{pmatrix}$.

Affirmation 3 : Le vecteur \vec{u} est un vecteur normal au plan (FAC).



Corrigé

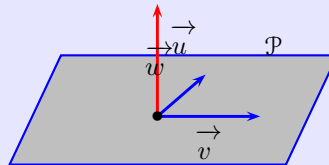


Vecteur normal à un plan

Un vecteur non nul \vec{u} est normal à un plan \mathcal{P} si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Autrement dit, si \vec{v} et \vec{w} sont deux vecteurs non colinéaires du plan \mathcal{P} , alors :

$$\vec{u} \text{ normal à } \mathcal{P} \iff \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases}$$



On utilise les identités trigonométriques :

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha).$$

Ainsi, le vecteur \vec{u} a pour coordonnées :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Comme $\alpha \in]0 ; \pi[$, on a :

$$\sin(\alpha) > 0.$$

Le vecteur \vec{u} est donc non nul.

Pour montrer que l'affirmation est fautive, il suffit de trouver un vecteur du plan (FAC) auquel \vec{u} n'est pas orthogonal.

On considère le vecteur \overrightarrow{FC} , qui est un vecteur du plan (FAC) :

$$\overrightarrow{FC} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculons le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \overrightarrow{FC} &= \sin(\alpha) \times 0 + \sin(\alpha) \times 1 + (-\sin(\alpha)) \times (-1) \\ &= \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \overrightarrow{FC} = 2 \sin(\alpha)}$$



Or $\alpha \in]0; \pi[$, donc $\sin(\alpha) > 0$. Par conséquent :

$$2 \sin(\alpha) > 0$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \overrightarrow{FC} \neq 0}$$

Le vecteur \vec{u} n'est donc pas orthogonal au vecteur \overrightarrow{FC} , qui appartient pourtant au plan (FAC) .

Par conséquent, \vec{u} n'est pas un vecteur normal au plan (FAC) .

L'affirmation 3 est fausse.

4. Le cube ABCDEFGH possède 8 sommets. On s'intéresse au nombre N de segments que l'on peut construire en reliant 2 sommets distincts quelconques du cube.

Affirmation 4 : $N = \frac{8^2}{2}$.



Corrigé



Combinaisons

Soient n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$.

Le nombre de façons de choisir p éléments parmi n , sans tenir compte de l'ordre, est le coefficient binomial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

En particulier, pour choisir deux éléments parmi n , on obtient :

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Un cube possède 8 sommets. Construire un segment revient à choisir deux sommets distincts parmi les 8 sommets du cube.

L'ordre n'a pas d'importance : le segment $[AB]$ est le même que le segment $[BA]$.

On obtient donc :

$$N = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2}$$

$$\boxed{N = 28}$$

Or l'affirmation propose :

$$\frac{8^2}{2} = \frac{64}{2}$$

$$\boxed{\frac{8^2}{2} = 32}$$

On a donc $28 \neq 32$.

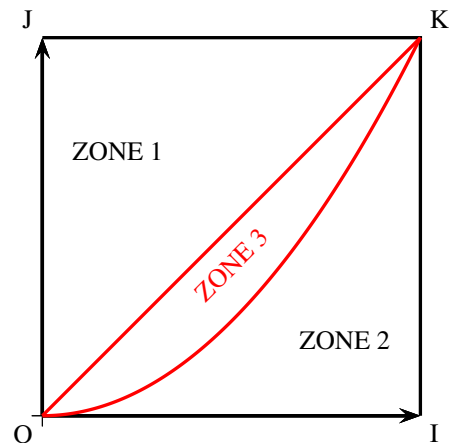
L'affirmation 4 est fausse.

**Exercice 2.****0 points**

Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$ ci-contre, on a représenté :

- la droite d'équation $y = x$;
- la droite d'équation $y = 1$;
- la droite d'équation $x = 1$;
- la parabole d'équation $y = x^2$.

On peut ainsi partager le carré OIKJ en trois zones.



Les parties B et C peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

Partie A

Démontrer les résultats figurant dans le tableau ci-dessous.

ZONE	ZONE 1	ZONE 2	ZONE 3
AIRE	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

**Corrigé****Aire sous une courbe**

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, alors l'aire, en unités d'aire, du domaine situé sous la courbe de f , au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, est :

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

- Aire de la ZONE 1.

La ZONE 1 est le triangle rectangle isocèle OKJ, situé au-dessus de la droite d'équation $y = x$ dans le carré OIKJ. Ses côtés perpendiculaires mesurent 1.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\text{ZONE 1}) &= \frac{OJ \times JK}{2} \\ &= \frac{1 \times 1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Aire}(\text{ZONE 1}) = \frac{1}{2}}$$

- Aire de la ZONE 2.

La ZONE 2 est le domaine situé sous la parabole d'équation $y = x^2$ entre $x = 0$ et $x = 1$.



La fonction carré est continue et positive sur $[0; 1]$, donc :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\text{ZONE 2}) &= \int_0^1 x^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Aire}(\text{ZONE 2}) = \frac{1}{3}}$$

- Aire de la ZONE 3.

Le carré OIKJ a pour côté 1, donc son aire vaut 1.

Les trois zones forment une partition du carré OIKJ. On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\text{ZONE 3}) &= 1 - \text{Aire}(\text{ZONE 1}) - \text{Aire}(\text{ZONE 2}) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{6}{6} - \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Aire}(\text{ZONE 3}) = \frac{1}{6}}$$

Les résultats du tableau sont donc bien démontrés.

Partie B : un premier jeu

Un joueur lance une fléchette sur le carré ci-dessus. On admet que la probabilité qu'elle tombe sur une zone est égale à l'aire de cette zone. Ainsi, la probabilité que la fléchette tombe sur la ZONE 3 est égale à $\frac{1}{6}$.

- Si la fléchette tombe sur la ZONE 3, alors le joueur lance une pièce équilibrée.
Si la pièce tombe sur PILE, alors le joueur gagne, sinon il perd.
- Si la fléchette tombe sur une autre zone que la ZONE 3, alors le joueur lance un dé équilibré à six faces. Si le dé tombe sur la FACE 6, alors le joueur gagne, sinon il perd.

On note les évènements suivants :

T : « la fléchette tombe sur la ZONE 3 » ;

G : « le joueur gagne ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.



Corrigé



Arbre pondéré

Dans un arbre pondéré :

- la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin ;
- une branche secondaire porte une probabilité conditionnelle.



D'après la partie A :

$$P(T) = \frac{1}{6} \text{ et donc } P(\bar{T}) = \frac{5}{6}.$$

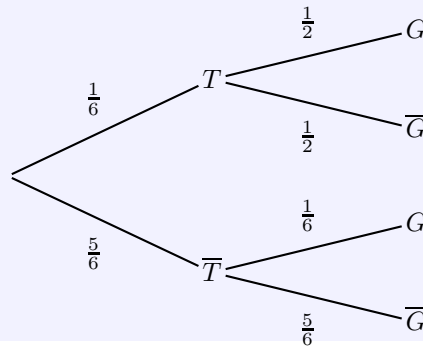
Si T est réalisé, le joueur lance une pièce équilibrée, donc :

$$P_T(G) = \frac{1}{2} \text{ et } P_T(\bar{G}) = \frac{1}{2}.$$

Si \bar{T} est réalisé, le joueur lance un dé équilibré à six faces. Il gagne uniquement si le dé tombe sur la face 6, donc :

$$P_{\bar{T}}(G) = \frac{1}{6} \text{ et } P_{\bar{T}}(\bar{G}) = \frac{5}{6}.$$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{2}{9}$.



Corrigé



Formule des probabilités totales

Si A est un évènement tel que $0 < P(A) < 1$, alors les évènements A et \bar{A} forment une partition de l'univers.

Pour tout évènement B , on a :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B).$$

En utilisant les probabilités conditionnelles, cela s'écrit :

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B).$$

Les évènements T et \bar{T} forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(T \cap G) + P(\bar{T} \cap G) \\ &= P(T) \times P_T(G) + P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(G) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{5}{36} \\ &= \frac{3}{36} + \frac{5}{36} \\ &= \frac{8}{36} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(G) = \frac{2}{9}}$$



La probabilité de l'évènement G est donc bien égale à $\frac{2}{9}$.

3. On sait que le joueur a gagné. Quelle est la probabilité que la fléchette soit tombée sur la ZONE 3 ?



Corrigé



Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux évènements tels que $P(B) \neq 0$.

La probabilité de A sachant B est :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On cherche la probabilité que la fléchette soit tombée sur la ZONE 3 sachant que le joueur a gagné, c'est-à-dire $P_G(T)$.

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} P_G(T) &= \frac{P(T \cap G)}{P(G)} \\ &= \frac{P(T) \times P_T(G)}{P(G)} \\ &= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{9}} \\ &= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{9}} \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{9}{2} \\ &= \frac{9}{24} \end{aligned}$$

$$P_G(T) = \frac{3}{8}$$

La probabilité que la fléchette soit tombée sur la ZONE 3 sachant que le joueur a gagné est donc $\frac{3}{8}$.

Partie C : un second jeu

Un joueur, appelé joueur $n^{\circ} 1$, lance une fléchette sur le carré précédent. Comme dans la partie B, on admet que la probabilité que la fléchette tombe sur chacune des zones est égale à l'aire de cette zone.

Le joueur gagne une somme égale, en euros, au numéro de la zone. Par exemple, si la fléchette tombe sur la ZONE 3, le joueur gagne 3 euros.

On note X_1 la variable aléatoire donnant le gain du joueur $n^{\circ} 1$.

On note respectivement $E(X_1)$ et $V(X_1)$ l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_1 .

1. 1. a. Calculer $E(X_1)$.



Corrigé

**Espérance d'une variable aléatoire**

Si une variable aléatoire X prend les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec les probabilités respectives p_1, p_2, \dots, p_n , alors :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

D'après la partie A, la loi de probabilité de X_1 est :

x_i	1	2	3
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

On calcule alors l'espérance de X_1 :

$$\begin{aligned} E(X_1) &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$E(X_1) = \frac{5}{3}$$

L'espérance du gain du joueur $n^\circ 1$ est donc $\frac{5}{3}$ euro.

1. b. Montrer que $V(X_1) = \frac{5}{9}$.

**Corrigé****Variance et formule de Kœnig**

Si X est une variable aléatoire d'espérance $E(X)$, alors :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Cette formule est appelée formule de Kœnig.

On calcule d'abord $E(X_1^2)$:

$$\begin{aligned} E(X_1^2) &= 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{6} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{6} + \frac{8}{6} + \frac{9}{6} \end{aligned}$$

$$E(X_1^2) = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$



D'après la formule de Koenig :

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E(X_1^2) - (E(X_1))^2 \\ &= \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 \\ &= \frac{10}{3} - \frac{25}{9} \\ &= \frac{30}{9} - \frac{25}{9} \end{aligned}$$

$$V(X_1) = \frac{5}{9}$$

On a donc bien :

$$V(X_1) = \frac{5}{9}$$

2. Un joueur n° 2 et un joueur n° 3 jouent à leur tour, dans les mêmes conditions que le joueur n° 1. On admet que les parties de ces trois joueurs sont indépendantes les unes des autres.

On note X_2 et X_3 les variables aléatoires donnant les gains des joueurs n° 2 et n° 3. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

2. a. Déterminer la probabilité que l'on ait $Y = 9$.



Corrigé

On a :

$$Y = X_1 + X_2 + X_3.$$

Chaque variable X_i prend les valeurs 1, 2 ou 3. Ainsi, pour obtenir $Y = 9$, il faut nécessairement que chacun des trois joueurs gagne 3 euros.

On a donc :

$$\{Y = 9\} = \{X_1 = 3\} \cap \{X_2 = 3\} \cap \{X_3 = 3\}.$$

Comme les parties sont indépendantes :

$$\begin{aligned} P(Y = 9) &= P(X_1 = 3) \times P(X_2 = 3) \times P(X_3 = 3) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$P(Y = 9) = \frac{1}{216}$$

2. b. Calculer $E(Y)$.



Corrigé



Linéarité de l'espérance

Pour toutes variables aléatoires X et Y , et pour tous réels a et b , on a :

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

En particulier :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Les trois joueurs jouent dans les mêmes conditions. Ainsi :

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \frac{5}{3}.$$



Comme $Y = X_1 + X_2 + X_3$, d'après la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) \\ &= \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y) = 5}$$

2. c. Justifier que $V(Y) = \frac{5}{3}$.



Corrigé



Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Plus généralement, si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes, alors :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

Les parties des trois joueurs sont indépendantes. Les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 sont donc indépendantes. De plus, les trois joueurs jouent dans les mêmes conditions, donc :

$$V(X_1) = V(X_2) = V(X_3) = \frac{5}{9}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) \\ &= \frac{5}{9} + \frac{5}{9} + \frac{5}{9} \\ &= \frac{15}{9} \end{aligned}$$

$$\boxed{V(Y) = \frac{5}{3}}$$

On a donc bien :

$$\boxed{V(Y) = \frac{5}{3}}$$

**Exercice 3.****0 points**

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln \left(e^{\frac{x}{2}} + 2 \right)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

**Corrigé****Dérivée de $\ln(u)$**

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

Alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}.$$

On pose, pour tout réel x :

$$u(x) = e^{\frac{x}{2}} + 2.$$

La fonction u est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$u(x) > 0.$$

La fonction f est donc dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^{\frac{x}{2}} + 2)'}{e^{\frac{x}{2}} + 2} \\ &= \frac{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + 2}. \end{aligned}$$

Or, pour tout réel x :

$$e^{\frac{x}{2}} > 0.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} > 0 \quad \text{et} \quad e^{\frac{x}{2}} + 2 > 0.$$

On en déduit que :

$$f'(x) > 0$$

La dérivée de f est strictement positive sur \mathbb{R} . Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .



2. Montrer que $f(2 \ln(2)) = 2 \ln(2)$.



Corrigé



Logarithme et exponentielle

Pour tout réel x , on a :

$$\ln(e^x) = x.$$

Pour tout réel strictement positif a , on a :

$$e^{\ln(a)} = a.$$

De plus, pour tout réel strictement positif a et tout entier n , on a :

$$\ln(a^n) = n \ln(a).$$

On calcule l'image de $2 \ln(2)$ par la fonction f :

$$\begin{aligned} f(2 \ln(2)) &= \ln\left(e^{\frac{2 \ln(2)}{2}} + 2\right) \\ &= \ln\left(e^{\ln(2)} + 2\right) \\ &= \ln(2 + 2) \\ &= \ln(4) \\ &= \ln(2^2) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(2 \ln(2)) = 2 \ln(2)}$$

On a bien montré que $2 \ln(2)$ est un point fixe de la fonction f .

3. Montrer que $u_1 = \ln(5)$.



Corrigé

Par définition de la suite, on a :

$$u_1 = f(u_0).$$

Or $u_0 = \ln(9)$, donc :

$$\begin{aligned} u_1 &= f(\ln(9)) \\ &= \ln\left(e^{\frac{\ln(9)}{2}} + 2\right) \\ &= \ln\left(e^{\ln\left(9^{\frac{1}{2}}\right)} + 2\right) \\ &= \ln\left(e^{\ln(3)} + 2\right) \\ &= \ln(3 + 2) \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = \ln(5)}$$



4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$2 \ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$$



Corrigé



Raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n , on procède en trois étapes :

- **Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie au premier rang.
- **Hérédité** : on suppose que la propriété est vraie à un rang n fixé et on démontre qu'elle est alors vraie au rang suivant.
- **Conclusion** : on conclut que la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

On considère la propriété \mathcal{P}_n définie, pour tout entier naturel n , par :

$$\mathcal{P}_n : 2 \ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

• Initialisation.

On sait que :

$$u_0 = \ln(9) \quad \text{et} \quad u_1 = \ln(5).$$

Comme la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} 4 &\leq 5 \leq 9 \\ \iff \ln(4) &\leq \ln(5) \leq \ln(9) \\ \iff \ln(2^2) &\leq u_1 \leq u_0 \\ \iff 2 \ln(2) &\leq u_1 \leq u_0. \end{aligned}$$

La propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

• Hérédité.

Soit n un entier naturel. Supposons que la propriété \mathcal{P}_n soit vraie, c'est-à-dire :

$$2 \ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} . On peut donc appliquer f aux trois membres de l'encadrement en conservant l'ordre :

$$\begin{aligned} 2 \ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n &\iff f(2 \ln(2)) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \\ &\iff 2 \ln(2) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}. \end{aligned}$$

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie.

• Conclusion.

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , on a :

$$2 \ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n.$$



5. En déduire que la suite (u_n) converge.



Corrigé



Théorème de convergence monotone

Toute suite décroissante et minorée converge.

De même, toute suite croissante et majorée converge.

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n , on a :

$$2 \ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

En particulier :

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

De plus, toujours d'après l'encadrement précédent :

$$2 \ln(2) \leq u_{n+1}.$$

Comme $u_0 = \ln(9)$ et que $\ln(9) \geq 2 \ln(2)$, on en déduit que tous les termes de la suite sont minorés par $2 \ln(2)$.

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée.

D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers ℓ avec $2 \ln(2) \leq \ell$.

La suite (u_n) converge vers ℓ avec $2 \ln(2) \leq \ell$.

6.

6. a. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $X^2 - X - 2 = 0$.



Corrigé

On considère le trinôme du second degré :

$$X^2 - X - 2.$$

L'expression $(X^2 - 1X - 2)$ est une expression du second degré de la forme $(aX^2 + bX + c)$. Avec :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases} \implies \Delta = 9 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $X \mapsto (X^2 - 1X - 2)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2$$

Ainsi, l'équation $X^2 - X - 2 = 0$ admet deux solutions réelles :

$$X = -1 \quad \text{ou} \quad X = 2.$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \{-1; 2\}$$



6. b. En déduire l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de l'équation :

$$e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$



Corrigé

On pose :

$$X = e^{\frac{x}{2}}.$$

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, on a :

$$X > 0.$$

De plus :

$$e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 &\iff \begin{cases} \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \\ X = e^{\frac{x}{2}} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X^2 - X - 2 = 0 \\ X = e^{\frac{x}{2}} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X = -1 \text{ ou } X = 2 \\ X = e^{\frac{x}{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Or $X = e^{\frac{x}{2}} > 0$, donc $X = -1$ est impossible.

Il reste donc :

$$\begin{aligned} X &= 2 \\ \iff e^{\frac{x}{2}} &= 2 \\ \iff \frac{x}{2} &= \ln(2) \\ \iff x &= 2 \ln(2). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \{2 \ln(2)\}$$



6. c. En déduire l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de l'équation $f(x) = x$.



Corrigé



Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien \ln est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Elle est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Par conséquent, pour tous réels strictement positifs a et b , on a :

$$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b.$$

De plus, pour tout réel x , on a :

$$\ln(e^x) = x.$$

On résout l'équation $f(x) = x$.

Pour tout réel x , on a :

$$e^{\frac{x}{2}} + 2 > 0 \quad \text{et} \quad e^x > 0.$$

Les deux quantités $e^{\frac{x}{2}} + 2$ et e^x appartiennent donc bien à l'ensemble de définition de la fonction \ln .

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \ln(e^{\frac{x}{2}} + 2) = \ln(e^x) \\ &\iff e^{\frac{x}{2}} + 2 = e^x \\ &\iff e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, cette équation admet une unique solution :

$$x = 2 \ln(2).$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \{2 \ln(2)\}$$



6. d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .



Corrigé



Image d'une suite convergente par une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Si une suite (u_n) d'éléments de I converge vers un réel $\ell \in I$, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

En particulier, si la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

et si (u_n) converge vers un réel $\ell \in I$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient donc :

$$\boxed{f(\ell) = \ell.}$$

- D'après la question précédente, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ avec :

$$2 \ln(2) \leq \ell.$$

- La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , donc elle est continue sur \mathbb{R} .
- Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Comme (u_n) converge vers ℓ , la suite décalée (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ .

De plus, comme f est continue sur \mathbb{R} , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

- Or, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Par unicité de la limite, on obtient :

$$\ell = f(\ell).$$

Ainsi, ℓ est solution de l'équation :

$$f(x) = x.$$

- D'après la question précédente, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur \mathbb{R} :

$$x = 2 \ln(2).$$

Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \ln(2)}$$

**Exercice 4.****0 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe \mathcal{C}_f .

**Corrigé****Propriété 1** (Limites liées à la fonction logarithme)

• (1) limites usuelles :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

• (2) croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

• (3) (nombre dérivé en 1) :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

**Asymptotes parallèles aux axes**

On rappelle les propriétés suivantes :

- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f ;
- si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

On rappelle que :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1.$$

• **Limite en 0^+ .**

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a :

$$\ln(x) \rightarrow -\infty \quad \text{et} \quad x^2 \rightarrow 0^+.$$

Comme $x^2 > 0$ pour tout $x > 0$, on obtient par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1 \right)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty}$$

Par conséquent, la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f .

• **Limite en $+\infty$.**



D'après les croissances comparées entre la fonction logarithme népérien et les fonctions puissances, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1 \right)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$$

Par conséquent, la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$.

2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$



Corrigé



Dérivée d'un quotient

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , avec v ne s'annulant pas sur I , alors :

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$. On pose :

$$u(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad v(x) = x^2.$$

Alors, pour tout $x > 0$:

$$u'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x.$$

Comme $x^2 > 0$ pour tout $x > 0$, on peut utiliser la formule de dérivation d'un quotient.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1 \right)' \\ &= \left(\frac{\ln(x)}{x^2} \right)' \\ &= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{x(1 - 2 \ln(x))}{x^4} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}}$$



3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.



Corrigé

On sait que, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}.$$

Comme $x > 0$, on a :

$$x^3 > 0.$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1 - 2 \ln(x)$.

On résout :

$$\begin{aligned} 1 - 2 \ln(x) \geq 0 &\iff -2 \ln(x) \geq -1 \\ &\iff \ln(x) \leq \frac{1}{2} \\ &\iff x \leq e^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La dernière équivalence est justifiée par la stricte croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} .

Ainsi :

$$f'(x) \geq 0 \iff 0 < x \leq e^{\frac{1}{2}}.$$

Calculons la valeur de f au point critique :

$$\begin{aligned} f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} + 1 \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{e} + 1 \\ &= \frac{1}{2e} + 1 \end{aligned}$$

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1 + 2e}{2e}$$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$		+	0	-
Variations de f			$\frac{1 + 2e}{2e}$	
		$-\infty$		1

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}]$, puis strictement décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$.



4.

4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α , sur l'intervalle $]0; +\infty[$.**Corrigé****Théorème 1** (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

- Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation

$$f(x) = k$$

admet une unique solution dans $[a; b]$.

- **Remarque** : on peut également appliquer ce corollaire dans le cas d'un intervalle de type $[a; +\infty[$, $[a; b[$, $]a; +\infty[$ ou $] -\infty; b]$.

On remplace alors le calcul de $f(a)$ ou de $f(b)$ par un calcul de limite.

- **Repère historique** : la première démonstration rigoureuse du théorème des valeurs intermédiaires est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

Bernard Bolzano
(1781-1848)

D'après les questions précédentes, on dispose du tableau de variation suivant :

x	0	α	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	0	$\frac{1+2e}{2e}$	1

- Sur l'intervalle $]0; e^{\frac{1}{2}}]$, la fonction f est continue et strictement croissante.
- De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1+2e}{2e} > 0.$$

Le réel 0 est donc compris entre $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$.D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0; e^{\frac{1}{2}}]$. On la note α .

- Sur l'intervalle $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$, la fonction f est strictement décroissante et :

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1+2e}{2e} > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 > 0.$$

Ainsi, d'après le tableau de variation, la fonction f reste strictement positive sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$. L'équation $f(x) = 0$ n'admet donc aucune solution sur cet intervalle.Finalement, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $]0; +\infty[$, notée α .L'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α sur $]0; +\infty[$.



4. b. Donner un encadrement du réel α d'amplitude 0,01.



Corrigé

On calcule les valeurs de f aux bornes de l'intervalle $[0,65; 0,66]$.

$$f(0,65) = \frac{\ln(0,65)}{0,65^2} + 1 \\ \approx -0,0196 < 0.$$

$$f(0,66) = \frac{\ln(0,66)}{0,66^2} + 1 \\ \approx 0,0461 > 0.$$

La fonction f étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0; e^{\frac{1}{2}}]$, et comme la solution α appartient à cet intervalle, on en déduit :

$$0,65 < \alpha < 0,66.$$

L'amplitude de cet encadrement est :

$$0,66 - 0,65 = 0,01.$$

Ainsi :

$$\boxed{0,65 < \alpha < 0,66.}$$

4. c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.



Corrigé

D'après les questions précédentes :

- la fonction f est strictement croissante sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$;
- l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α sur $]0; +\infty[$;
- la fonction f est strictement positive sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$.

Comme f s'annule uniquement en α , on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) < 0 \quad \text{sur }]0; \alpha[, \\ f(\alpha) = 0, \\ f(x) > 0 \quad \text{sur }]\alpha; +\infty[. \end{array}}$$



5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x)$$

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé d'origine O . On considère un réel x strictement positif et le point M de la courbe C_g d'abscisse x . On note OM la distance entre les points O et M .

5. a. Exprimer la quantité OM^2 en fonction du réel x .



Corrigé

Le point M appartient à la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ et a pour abscisse x .

Ainsi :

$$M(x; \ln(x)).$$

Dans un repère orthonormé, la distance entre $O(0; 0)$ et $M(x; \ln(x))$ vérifie :

$$\begin{aligned} OM^2 &= (x - 0)^2 + (\ln(x) - 0)^2 \\ &= x^2 + (\ln(x))^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{OM^2 = x^2 + (\ln(x))^2}$$

5. b. Montrer que, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0; +\infty[$, la quantité OM^2 admet un minimum en α .



Corrigé

On définit la fonction h sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = OM^2 = x^2 + (\ln(x))^2.$$

La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x + 2 \ln(x) \times \frac{1}{x} \\ &= 2x + \frac{2 \ln(x)}{x} \\ &= \frac{2x^2 + 2 \ln(x)}{x} \\ &= 2x \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{h'(x) = 2xf(x)}$$

Or, pour tout $x > 0$, on a :

$$2x > 0.$$

Ainsi, $h'(x)$ est du signe de $f(x)$.

D'après la question 4.c :

$$f(x) < 0 \text{ sur }]0; \alpha[, \quad f(\alpha) = 0, \quad f(x) > 0 \text{ sur }]\alpha; +\infty[.$$

On en déduit :

$$h'(x) < 0 \text{ sur }]0; \alpha[, \quad h'(\alpha) = 0, \quad h'(x) > 0 \text{ sur }]\alpha; +\infty[.$$

La fonction h est donc décroissante sur $]0; \alpha[$, puis croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

Par conséquent, h admet un minimum en α .

Comme $h(x) = OM^2$, la quantité OM^2 admet un minimum en α .



La quantité OM^2 admet un minimum en α .

5. c. La valeur minimale de la distance OM , lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0; +\infty[$, est appelée distance du point O à la courbe \mathcal{C}_g . On note d cette distance.

Exprimer d à l'aide de α .



Corrigé

La quantité OM^2 est minimale lorsque $x = \alpha$.

On a donc :

$$d^2 = \alpha^2 + (\ln(\alpha))^2.$$

Or α est solution de l'équation $f(x) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\iff \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} + 1 = 0 \\ &\iff \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} = -1 \\ &\iff \ln(\alpha) = -\alpha^2. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$(\ln(\alpha))^2 = \alpha^4.$$

Donc :

$$\begin{aligned} d^2 &= \alpha^2 + \alpha^4 \\ &= \alpha^2(1 + \alpha^2). \end{aligned}$$

Comme $\alpha > 0$ et $d > 0$, on obtient :

$$d = \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)}$$

$$d = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$$

↵ **Fin du devoir** ↵