MATH93

Cinquième

Recueil d'exercices – Entraînement – Méthodes

TD – EXERCICES

Chapitre 5 – TD

Nombres rationnels

Version corrigée – Version imprimable

Sommaire du TD

I Ensembles et fractions 2

II Comparer et ranger 5

III Addition et soustraction 8

IV Problèmes avec des fractions 13

V Programmes de calcul et Scratch 16

VI Maths US : mixed numbers 17

VII Now we can talk – AMC 8, SAT et MATHCOUNTS 19

VIII Devoir maison 22

Objectifs

- Reconnaître les ensembles de nombres et traduire leur appartenance.
- Comprendre une fraction comme un quotient, utiliser les fractions égales et simplifier.
- Comparer et ranger des fractions, y compris des fractions négatives.
- Additionner et soustraire des fractions, en justifiant les dénominateurs communs.
- Résoudre des problèmes à plusieurs étapes.
- Utiliser des lettres, évaluer des expressions et lire des programmes Scratch.
- Découvrir la notation américaine *(mixed numbers)* et des problèmes AMC 8.

Thème I Ensembles et fractions

Exercice 1 Ensembles de nombres

Calculer Raisonner

On rappelle que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Pour chaque nombre du tableau, déterminer le **plus petit ensemble au sens de l'inclusion** auquel il appartient, parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Compléter la deuxième ligne en utilisant uniquement le symbole de l'ensemble choisi.

Nombre	-7	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{12}{3}$	$-\frac{5}{2}$	0	$\sqrt{2}$	π	$-1{,}75$
Plus petit ensemble	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Justifier le choix effectué pour $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{12}{3}$.

Corrigé

Pour chaque nombre, on cherche le premier ensemble de la chaîne $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ qui le contient.

Nombre	-7	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{12}{3}$	$-\frac{5}{2}$	0	$\sqrt{2}$	π	$-1{,}75$
Ensemble	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{D}$

En effet $\frac{3}{8} = 0{,}375$ a une écriture décimale finie. Le nombre $\frac{2}{9} = 0{,}222\ldots$ n'a pas d'écriture décimale finie : il est rationnel mais non décimal. Enfin $\frac{12}{3} = 4$ est un entier naturel. Les nombres $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels : leur plus petit ensemble dans cette liste est $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Écrire des entiers et des décimaux sous forme de fractions

Calculer Raisonner

1. Écrire sous forme d'une fraction de dénominateur 1 : $A = 2$, $B = -7$ et $C = 0$.
2. Écrire sous forme de fraction décimale, puis de fraction irréductible :
   a) $D = 2{,}3$;
   b) $E = 0{,}75$;
   c) $F = -1{,}25$;
   d) $G = 3{,}04$.
3. Écrire $x = 1{,}2$ sous forme de fraction irréductible, puis calculer $P(x) = x + \dfrac{3}{5}$.

Corrigé

1. Tout entier n s'écrit $\frac{n}{1}$, donc
$$\boxed{A = \frac{2}{1}, \quad B = -\frac{7}{1}, \quad C = \frac{0}{1}.}$$
2. On utilise une puissance de 10 au dénominateur, puis on simplifie :
$$D = \frac{23}{10}, \qquad E = \frac{75}{100} = \boxed{\frac{3}{4}},$$
$$F = -\frac{125}{100} = \boxed{-\frac{5}{4}}, \qquad G = \frac{304}{100} = \boxed{\frac{76}{25}}.$$
3. $x = 1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$. Ainsi
$$P(x) = \frac{6}{5} + \frac{3}{5} = \boxed{\frac{9}{5}}.$$

Exercice 3 Fraction et nombre quotient

Calculer Raisonner

1. Quel nombre faut-il multiplier par 7 pour obtenir 5 ? Donner sa valeur exacte sous forme de fraction.
2. À quelles conditions $\dfrac{a}{b}$ est-elle définie ?
3. Compléter $\dfrac{\cdots}{9} \times 9 = 4$ puis $\dfrac{21}{7} = \ldots$.
4. Quel est le numérateur *(numerator)* et le dénominateur *(denominator)* de $-\dfrac{11}{6}$?

Corrigé

1. Le quotient cherché est $\boxed{\frac{5}{7}}$, car $7 \times \frac{5}{7} = 5$.
2. Le quotient $\frac{a}{b}$ est défini lorsque $\boxed{b \neq 0}$.
3. $\frac{4}{9} \times 9 = 4$ et $\frac{21}{7} = \boxed{3}$.
4. Le numérateur est -11 si l'on écrit la fraction $\frac{-11}{6}$ et son dénominateur est 6. Le signe « $-$ » peut aussi être placé devant la fraction.

Exercice 4 Lettres et quotients : *(evaluate an expression)*

Calculer Raisonner

On pose $A(x) = \dfrac{x+3}{4}$ et $B(x) = \dfrac{2x-1}{6}$.

1. Calculer $A(1)$, $A(5)$ et $B(2)$.
2. Déterminer x lorsque $A(x) = \dfrac{5}{4}$.
3. Pour $x = 3$, les nombres $A(x)$ et $B(x)$ sont-ils décimaux ? Justifier.

Corrigé

1. $A(1) = \frac{1+3}{4} = \boxed{1}$, $A(5) = \frac{5+3}{4} = \boxed{2}$ et $B(2) = \frac{2\times2-1}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$.
2. $A(x) = \frac{5}{4}$ signifie $\frac{x+3}{4} = \frac{5}{4}$, soit $x + 3 = 5$; donc $\boxed{x = 2}$.
3. $A(3) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$: ce nombre est décimal. En revanche $B(3) = \frac{5}{6}$ n'a pas d'écriture décimale finie : il n'est pas décimal.

Exercice 5 [!] Bilan fractions égales

Calculer Raisonner

1. Compléter $\dfrac{3}{7} = \dfrac{\ldots}{28}$ et $\dfrac{\ldots}{15} = \dfrac{2}{5}$.
2. Simplifier $\dfrac{42}{63}$ en détaillant les divisions.
3. Les fractions $\dfrac{12}{18}$ et $\dfrac{16}{24}$ représentent-elles le même nombre ? Justifier.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 6, page 5.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 7, page 5.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Corrigé

1. $\frac{3}{7} = \frac{3\times4}{7\times4} = \boxed{\frac{12}{28}}$ et $\frac{2}{5} = \frac{2\times3}{5\times3} = \boxed{\frac{6}{15}}$.
2. $\frac{42}{63} = \frac{42\div21}{63\div21} = \boxed{\frac{2}{3}}$.
3. $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ et $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$. Les deux fractions représentent donc le même nombre.

Exercice 6 [+] Consolidation Fractions égales

Calculer Raisonner

1. Compléter $\frac{5}{8} = \frac{\dots}{40}$ et $\frac{\dots}{21} = \frac{3}{7}$.
2. Simplifier $\frac{30}{45}$.
3. Montrer que $\frac{8}{12} = \frac{14}{21}$.

Corrigé

1. $\frac{5}{8} = \frac{25}{40}$ et $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$.
2. $\frac{30}{45} = \frac{30\div 15}{45\div 15} = \boxed{\frac{2}{3}}$.
3. $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ et $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$; ces fractions sont égales.

Exercice 7 [*] Approfondissement Une fraction cachée

Calculer Raisonner

On cherche une fraction $\frac{a}{b}$ avec a, b entiers naturels non nuls, telle que $a+b=55$ et $\frac{a}{b} = \frac{4}{7}$.

1. Expliquer pourquoi on peut écrire $a = 4k$ et $b = 7k$ avec un même entier naturel k.
2. Déterminer a et b.

Corrigé

Puisque $\frac{a}{b} = \frac{4}{7}$, on a $7a = 4b$. Comme 4 et 7 sont premiers entre eux, a est un multiple de 4 et b le multiple de 7 correspondant : $a = 4k$ et $b = 7k$ pour un même entier naturel k. Donc $a + b = 11k = 55$, d'où $k = 5$. Finalement $\boxed{a = 20, \quad b = 35}$. On vérifie $20 + 35 = 55$ et $\frac{20}{35} = \frac{4}{7}$.

Thème II Comparer et ranger

Exercice 8 Comparer des fractions

Calculer Raisonner

Comparer en justifiant :

1. $\frac{5}{11}$ et $\frac{8}{11}$;
2. $\frac{7}{13}$ et $\frac{7}{9}$;
3. $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{8}$;
4. $-\frac{5}{7}$ et $-\frac{3}{7}$.

Corrigé

1. Même dénominateur : $5 < 8$, donc $\boxed{\frac{5}{11} < \frac{8}{11}}$.
2. Même numérateur positif : $9 < 13$, donc $\boxed{\frac{7}{13} < \frac{7}{9}}$.
3. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$; or $6 > 5$, donc $\boxed{\frac{3}{4} > \frac{5}{8}}$.
4. $-5 < -3$, donc $\boxed{-\frac{5}{7} < -\frac{3}{7}}$.

Exercice 9 Ranger dans l'ordre croissant

Calculer Raisonner

Ranger dans l'ordre croissant les nombres $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{6}$. Justifier en utilisant un dénominateur commun.

Corrigé

On utilise le dénominateur commun 12 : $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, $\frac{5}{12} = \frac{5}{12}$, $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ et $\frac{7}{6} = \frac{14}{12}$. Comme $5 < 8 < 9 < 14$, on obtient

$$\boxed{\frac{5}{12} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{6}}.$$

Exercice 10 Comparer deux expressions selon la valeur de x

Calculer Raisonner

On définit $F(x) = \dfrac{x+1}{3}$ et $G(x) = \dfrac{x}{2}$.

1. Calculer $F(1)$ et $G(1)$; les comparer.
2. Reprendre pour $x = 3$ et $x = 4$.
3. Trouver un entier naturel x pour lequel $F(x) = G(x)$.

Corrigé

1. $F(1) = \frac{2}{3}$ et $G(1) = \frac{1}{2}$; comme $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} > \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $F(1) > G(1)$.
2. $F(3) = \frac{4}{3}$ et $G(3) = \frac{3}{2}$. Or $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} < \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, donc $F(3) < G(3)$. De même $F(4) = \frac{5}{3} < 2 = G(4)$.
3. On cherche $\frac{x+1}{3} = \frac{x}{2}$. En multipliant chaque membre par 6, $2(x+1) = 3x$, donc $2x + 2 = 3x$, soit $\boxed{x = 2}$. Vérification : $F(2) = G(2) = 1$.

Exercice 11 [!] Bilan encadrer une fraction

Calculer Raisonner

1. Comparer $\frac{7}{9}$ et $\frac{5}{6}$ en les mettant au même dénominateur.
2. Encadrer $\frac{17}{5}$ par deux entiers consécutifs.
3. Ranger $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, 0 et $\frac{1}{4}$ dans l'ordre croissant.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 12, page 7.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 13, page 8.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Corrigé

1. $\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$ et $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$, donc $\boxed{\frac{7}{9} < \frac{5}{6}}$.
2. $\frac{15}{5} < \frac{17}{5} < \frac{20}{5}$, donc $\boxed{3 < \frac{17}{5} < 4}$.
3. $-\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{2} = -\frac{2}{4}$, $0 = \frac{0}{4}$. Ainsi $\boxed{-\frac{3}{4} < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{4}}$.

Exercice 12 [+] Consolidation Comparer et encadrer

Calculer Raisonner

1. Comparer $\frac{5}{8}$ et $\frac{3}{4}$.
2. Encadrer $\frac{23}{6}$ entre deux entiers consécutifs.
3. Ranger $-\frac{3}{5}$, 0, $-\frac{1}{5}$ et $\frac{2}{5}$.

Corrigé

1. $\frac{5}{8} = \frac{5}{8} < \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.
2. $\frac{18}{6} < \frac{23}{6} < \frac{24}{6}$, donc $\boxed{3 < \frac{23}{6} < 4}$.
3. En cinquièmes : $-\frac{3}{5} < -\frac{1}{5} < 0 < \frac{2}{5}$.

Exercice 13 [*] Approfondissement Encadrement avec une inconnue

Calculer Raisonner

Trouver tous les entiers naturels n tels que $\dfrac{2}{3} < \dfrac{n}{12} < \dfrac{5}{4}$. Justifier.

Corrigé

On cherche les entiers naturels n tels que $\frac{2}{3} < \frac{n}{12} < \frac{5}{4}$. Comme $12 > 0$, on peut multiplier chaque membre par 12 : $8 < n < 15$. Les seules valeurs possibles sont donc

$$\boxed{n \in \{9; 10; 11; 12; 13; 14\}}.$$

Thème III Addition et soustraction

Exercice 14 Calculs : même dénominateur

Calculer Raisonner

Calculer les expressions suivantes et donner les résultats sous forme de fractions simplifiées :

1. $A = \dfrac{11}{15} + \dfrac{7}{15}$;
2. $B = \dfrac{13}{8} - \dfrac{5}{8}$;
3. $C = -\dfrac{9}{10} + \dfrac{3}{10}$.

Calculer ensuite $A - B$.

Corrigé

$$A = \frac{11+7}{15} = \frac{18}{15} = \boxed{\frac{6}{5}}, \qquad B = \frac{13-5}{8} = \boxed{1}, \qquad C = \frac{-9+3}{10} = \boxed{-\frac{3}{5}}.$$

Par suite $A - B = \frac{6}{5} - 1 = \frac{6}{5} - \frac{5}{5} = \boxed{\frac{1}{5}}$.

Exercice 15 Calculs : dénominateurs différents

Calculer Raisonner

Calculer en détaillant la mise au même dénominateur :

1. $\alpha = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{6}$;
2. $\beta = \dfrac{5}{8} - \dfrac{1}{3}$;
3. $\gamma = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{10}$;
4. $\delta = \dfrac{3}{2} - \left(-\dfrac{1}{4}\right)$.

Calculer ensuite $\alpha - \beta$.

Corrigé

$$\alpha = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \boxed{\frac{11}{12}}, \qquad \beta = \frac{15}{24} - \frac{8}{24} = \boxed{\frac{7}{24}},$$
$$\gamma = -\frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \boxed{-\frac{7}{10}}, \qquad \delta = \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}.$$

Finalement $\alpha - \beta = \frac{22}{24} - \frac{7}{24} = \boxed{\frac{15}{24} = \frac{5}{8}}$.

Exercice 16 Additionner et soustraire des entiers et des fractions

Calculer Raisonner

Calculer et donner les résultats sous forme de fractions simplifiées. Écrire les entiers sous forme de fractions de dénominateur adapté.

1. $A = 2 + \dfrac{3}{5}$;
2. $B = 3 - \dfrac{7}{6}$;
3. $C = -2 + \dfrac{5}{4}$;
4. $D = \dfrac{11}{3} - 4$;
5. $E = -1 - \left(-\dfrac{7}{3}\right)$;
6. $F = \dfrac{13}{4} - 3$.

Calculer ensuite $A - B$ et $C + D$.

Corrigé

$$A = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = \boxed{\frac{13}{5}}, \quad B = \frac{18}{6} - \frac{7}{6} = \boxed{\frac{11}{6}}, \quad C = -\frac{8}{4} + \frac{5}{4} = \boxed{-\frac{3}{4}},$$
$$D = \frac{11}{3} - \frac{12}{3} = \boxed{-\frac{1}{3}}, \quad E = -\frac{3}{3} + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}, \quad F = \frac{13}{4} - \frac{12}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Puis $A - B = \frac{78}{30} - \frac{55}{30} = \boxed{\frac{23}{30}}$ et $C + D = -\frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \boxed{-\frac{13}{12}}$.

Exercice 17 Fractions à compléter et somme astucieuse

Calculer Raisonner

1. Déterminer les nombres manquants dans les égalités :

a) $\alpha + \dfrac{3}{8} = 1$;

b) $\beta - \dfrac{5}{6} = 2$;

c) $\gamma + \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{2}$;

d) $\delta - 1 = -\dfrac{2}{5}$.

2. Calculer $S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}$. Que remarque-t-on ?

3. Trouver une écriture de 1 comme somme de **quatre fractions unitaires distinctes**, toutes de dénominateurs inférieurs ou égaux à 12. Justifier la réponse.

Corrigé

1. On isole chaque nombre inconnu :

$$\alpha = 1 - \frac{3}{8} = \boxed{\frac{5}{8}}, \qquad \beta = 2 + \frac{5}{6} = \boxed{\frac{17}{6}},$$

$$\gamma = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{10}{4} - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}, \qquad \delta = 1 - \frac{2}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}.$$

2. $S = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{1}$.

3. Une solution admissible est

$$\boxed{1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}}$$

car $\frac{6}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = 1$.

Exercice 18 Calcul littéral : deux expressions et une astuce

Calculer Raisonner

Pour tout nombre x, on définit

$$\alpha(x) = \frac{x}{3} + \frac{2x+1}{6} \qquad \text{et} \qquad \beta(x) = \frac{x+1}{2} - \frac{1}{3}.$$

1. Écrire $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sous la forme d'une seule fraction.
2. Calculer $\alpha(3)$ et $\beta(3)$, puis $\alpha(3) - \beta(3)$.
3. Exprimer $\alpha(x) - \beta(x)$ sous la forme d'une seule fraction.
4. **Astuce Maths US.** Sans chercher x et y, sachant que $2x + 3y = \frac{5}{7}$, calculer $14x + 21y$.

Corrigé

1. $\alpha(x) = \frac{2x}{6} + \frac{2x+1}{6} = \boxed{\frac{4x+1}{6}}$. De même $\beta(x) = \frac{3(x+1)}{6} - \frac{2}{6} = \boxed{\frac{3x+1}{6}}$.
2. $\alpha(3) = \frac{13}{6}$ et $\beta(3) = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. Leur différence vaut $\frac{13}{6} - \frac{10}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$.
3. $\alpha(x) - \beta(x) = \frac{4x+1-(3x+1)}{6} = \boxed{\frac{x}{6}}$.
4. $14x + 21y = 7(2x + 3y) = 7 \times \frac{5}{7} = \boxed{5}$. Aucune recherche de x ou y n'est nécessaire.

Exercice 19 [!] Bilan calculs en plusieurs étapes

Calculer Raisonner

On pose $A = \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}$ et $B = \frac{7}{10} - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)$.

1. Calculer A et simplifier.
2. Calculer l'expression entre parenthèses, puis B.
3. Calculer $A - B$.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 20, page 12.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 21, page 12.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Corrigé

1. $A = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} - \frac{6}{12} = \boxed{\frac{13}{12}}$.
2. D'abord $\frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2}{10} - \frac{5}{10} = -\frac{3}{10}$. Puis $B = \frac{7}{10} - (-\frac{3}{10}) = \boxed{1}$.
3. $A - B = \frac{13}{12} - \frac{12}{12} = \boxed{\frac{1}{12}}$.

Exercice 20 [+] Consolidation Calculs guidés

Calculer Raisonner

Calculer $C = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6}$ et $D = \dfrac{4}{5} - \left(\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{2}\right)$. Détailler les calculs, puis calculer $C - D$.

Corrigé

$$C = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

D'abord $\frac{1}{10} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{10}$, donc $D = \frac{8}{10} - (-\frac{4}{10}) = \boxed{\frac{6}{5}}$. Enfin $C - D = \frac{15}{20} - \frac{24}{20} = \boxed{-\frac{9}{20}}$.

Exercice 21 [*] Approfondissement Trouver la fraction manquante

Calculer Raisonner

1. Calculer $T = \dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3}\right)$ et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.
2. Déterminer les nombres rationnels x et y tels que

$$\frac{3}{8} + x = \frac{5}{6} \qquad \text{et} \qquad y - \frac{2}{7} = \frac{3}{14}.$$

   Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.
3. Calculer $T - x$.

Corrigé

1. $\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$; ainsi $T = \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \boxed{\frac{11}{12}}$.
2. $x = \frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \boxed{\frac{11}{24}}$. De même $y = \frac{3}{14} + \frac{2}{7} = \frac{3}{14} + \frac{4}{14} = \boxed{\frac{1}{2}}$.
3. $T - x = \frac{22}{24} - \frac{11}{24} = \boxed{\frac{11}{24}}$.

Thème IV Problèmes avec des fractions

Exercice 22 Problème : la bibliothèque

Calculer Raisonner

Dans une bibliothèque, $\frac{3}{8}$ des livres sont des romans et $\frac{1}{4}$ sont des bandes dessinées. Le reste est composé de documentaires.

1. Quelle fraction représentent ensemble les romans et les bandes dessinées ?
2. Quelle fraction des livres sont des documentaires ?
3. Sur 80 livres, combien sont des documentaires ?

Corrigé

1. $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \boxed{\frac{5}{8}}$.
2. Les documentaires représentent $1 - \frac{5}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$ des livres.
3. Sur 80 livres, cela fait $80 \div 8 \times 3 = \boxed{30 \text{ documentaires}}$.

Exercice 23 Le livre de Léa : fractions et pages

Calculer Raisonner Modéliser

Léa lit $\frac{1}{4}$ d'un livre le lundi, puis $\frac{3}{8}$ du **livre entier** le mardi. Le mercredi, elle lit les 45 pages restantes et termine le livre.

1. Quelle fraction du livre a-t-elle lue pendant les deux premiers jours ?
2. Quelle fraction du livre a-t-elle lue le mercredi ?
3. En déduire le nombre total de pages du livre, en justifiant.
4. On note N le nombre total de pages. Écrire une expression $R(N)$ donnant le nombre de pages restant à lire après le mardi.

Corrigé

1. $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\boxed{\frac{5}{8}}$ du livre.
2. Il reste $1-\frac{5}{8}=\boxed{\frac{3}{8}}$.
3. Les 45 pages représentent $\frac{3}{8}$ du total. Un huitième correspond à $45\div 3=15$ pages, donc le livre comporte $15\times 8=\boxed{120 \text{ pages}}$.
4. On peut écrire $R(N)=N-\frac{N}{4}-\frac{3N}{8}=\boxed{\frac{3N}{8}}$. Pour $N=120$, $R(120)=45$ pages.

Exercice 24 [!] Bilan partage d'une somme

Calculer Raisonner

Louise utilise $\frac{2}{5}$ de son argent pour acheter un livre et $\frac{1}{4}$ pour acheter une affiche. Elle dépense ainsi 39 euros.

1. Quelle fraction de son argent a-t-elle dépensée ?
2. Quelle fraction lui reste-t-il ?
3. Combien possédait-elle au départ ? Justifier.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 25, page 15.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 26, page 15.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Corrigé

1. $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{8}{20}+\frac{5}{20}=\boxed{\frac{13}{20}}$.
2. Il lui reste $1-\frac{13}{20}=\boxed{\frac{7}{20}}$.
3. Les 39 euros représentent $\frac{13}{20}$ du budget. Un vingtième vaut $39\div 13=3$ euros ; le budget initial est donc $3\times 20=\boxed{60 \text{ euros}}$.

Exercice 25 [+] Consolidation Budget pour un cadeau

Calculer Raisonner

Adam dépense $\frac{1}{3}$ de son budget pour un jeu et $\frac{1}{4}$ pour un livre. Il a dépensé 35 euros.

1. Déterminer la fraction de son budget dépensée.
2. Calculer son budget initial.

Corrigé

1. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\boxed{\frac{7}{12}}$.
2. Les 35 euros correspondent à $\frac{7}{12}$ du budget. Un douzième vaut $35\div 7=5$ euros, donc le budget vaut $5\times 12=\boxed{60 \text{ euros}}$.

Exercice 26 [*] Approfondissement Le réservoir

Calculer Raisonner

Un réservoir est rempli aux $\frac{7}{12}$ de sa capacité. On y ajoute $\frac{1}{6}$ de sa capacité, puis on en retire $\frac{1}{4}$.

1. Quelle fraction du réservoir est alors remplie ?
2. On sait qu'il contient désormais 90 litres. Quelle est sa capacité totale ?

Corrigé

1. La fraction remplie vaut $\frac{7}{12}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}+\frac{2}{12}-\frac{3}{12}=\boxed{\frac{1}{2}}$.
2. La moitié du réservoir contient 90 litres ; sa capacité totale vaut donc $90\times 2=\boxed{180 \text{ litres}}$.

Thème V Programmes de calcul et Scratch

Exercice 27 Un programme de calcul avec des fractions

Modéliser Calculer Raisonner

Programme de calcul

1. Choisir un nombre.
2. Ajouter $\frac{2}{3}$.
3. Multiplier le résultat par 3.
4. Soustraire le triple du nombre de départ.

Questions

1. Exécuter ce programme pour $x = 2$, puis pour $x = -1$.
2. Exprimer le résultat $P(x)$ en fonction de x ; simplifier.
3. Que remarque-t-on ? Justifier que cette propriété est vraie pour tout nombre x.

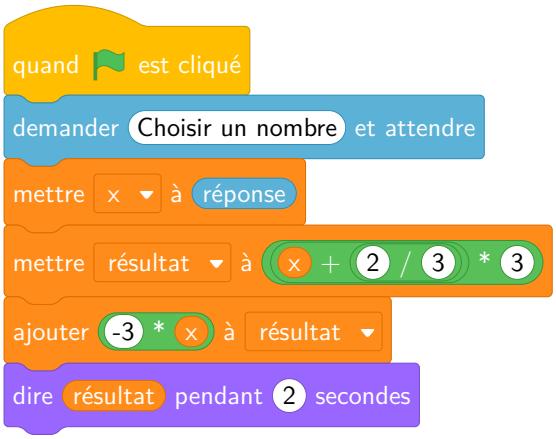
Corrigé

1. Pour $x = 2$: $2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, puis $\frac{8}{3} \times 3 = 8$, et $8 - 3 \times 2 = \boxed{2}$. Pour $x = -1$: $-1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$, puis $-1 - 3 \times (-1) = \boxed{2}$.
2. $P(x) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right) - 3x = 3x + 2 - 3x = \boxed{2}$.
3. Le programme renvoie toujours 2, quel que soit le nombre x choisi, car les termes en x s'annulent.

Exercice 28 Scratch : traduire et tester un programme

Modéliser Calculer Raisonner

On considère le programme Scratch ci-dessous, dans lequel x désigne le nombre choisi.



1. Quel résultat est affiché pour $x = 3$?
2. Écrire l'expression littérale correspondant au script, puis la réduire.
3. On remplace « ajouter $-3x$ » par « ajouter $-2x$ ». Exprimer le nouveau résultat en fonction de x, puis le calculer pour $x = -1$.

Corrigé

1. Pour $x = 3$, le programme calcule $(3 + \frac{2}{3}) \times 3 - 3 \times 3 = 11 - 9 = \boxed{2}$.
2. L'expression est $S(x) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right) - 3x = 3x + 2 - 3x = \boxed{2}$.
3. Après la modification, $S_1(x) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right) - 2x = \boxed{x + 2}$. Ainsi $S_1(-1) = \boxed{1}$.

Thème VI Maths US : mixed numbers

Exercice 29 Maths US : mixed numbers

Calculer Raisonner

Maths US – Mixed numbers and improper fractions

Dans la notation américaine, on distingue deux écritures :

- Un **mixed number** (nombre fractionnaire) est composé d'une partie entière (*(whole-number part)*) et d'une **proper fraction** (fraction propre, strictement comprise entre 0 et 1). Il représente leur **somme** : $2\,\dfrac{3}{4} = 2 + \dfrac{3}{4}$, et non $2 \times \dfrac{3}{4}$.
- Une **improper fraction** (fraction impropre) est une fraction positive dont le numérateur est supérieur ou égal au dénominateur (positif), par exemple $\dfrac{11}{4}$.

Ces deux écritures peuvent représenter **le même nombre** : $2\,\dfrac{3}{4} = \dfrac{11}{4}$.

1. Convertir les **mixed numbers** suivants en **improper fractions** : $3\,\dfrac{2}{5}$ et $1\,\dfrac{7}{8}$.
2. Convertir les **improper fractions** suivantes en **mixed numbers** : $\dfrac{23}{6}$ et $\dfrac{17}{4}$.
3. Calculer $1\,\dfrac{1}{2} + 2\,\dfrac{3}{4}$ et donner le résultat sous la forme d'un **mixed number**.

Corrigé

1. $3\,\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \boxed{\frac{17}{5}}$; $1\,\frac{7}{8} = 1 + \frac{7}{8} = \boxed{\frac{15}{8}}$.
2. $\frac{23}{6} = \frac{18}{6} + \frac{5}{6} = \boxed{3\,\frac{5}{6}}$; $\frac{17}{4} = \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{4\,\frac{1}{4}}$.
3. $1\,\frac{1}{2} + 2\,\frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{4} = 3 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = 4 + \frac{1}{4} = \boxed{4\,\frac{1}{4}}$.

Exercice 30 Maths US – Pente (slope) : rise over run

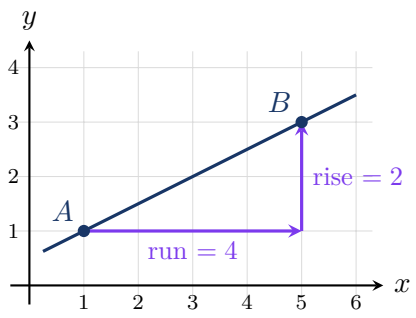
Représenter Calculer Raisonner

Maths US – Pente d'une droite (slope) : rise over run

Dans un repère, la **slope** d'une droite non verticale est le quotient

$$\boxed{\text{pente (slope)} = \frac{\text{rise}}{\text{run}} = \frac{\text{variation verticale}}{\text{variation horizontale}}.}$$

On compte les déplacements entre **deux points** de la droite : **rise** (déplacement vertical, vers le haut ou le bas), puis **run** (déplacement horizontal, vers la droite).



1. Lire les coordonnées des points A et B.
2. Relever le rise et le run indiqués sur la figure.
3. Déterminer la pente (slope) de la droite (AB) sous forme de fraction irréductible.
4. On considère $C(1;3)$ et $D(4;1)$. Sans tracer la droite (CD), déterminer sa pente (slope) en comptant le déplacement vertical puis horizontal de C vers D. Expliquer pourquoi cette pente est négative.

Corrigé

1. Sur la figure, $\boxed{A(1;1)}$ et $\boxed{B(5;3)}$.
2. De A vers B, le déplacement horizontal est $\boxed{\text{run} = 5 - 1 = 4}$ et le déplacement vertical est $\boxed{\text{rise} = 3 - 1 = 2}$.
3. La pente de (AB) vaut $\frac{\text{rise}}{\text{run}} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$.
4. De $C(1;3)$ vers $D(4;1)$, le déplacement horizontal vaut $4 - 1 = 3$ et le déplacement vertical $1 - 3 = -2$. La pente est donc $\boxed{-\frac{2}{3}}$. Elle est négative car la droite descend lorsqu'on va de gauche à droite.

Thème VII Now we can talk – AMC 8, SAT et MATHCOUNTS

Exercice 31 ★ AMC 8 2024 – Problem 2

Calculer Raisonner

Source : AMC 8, 2024, problem 2 (calcul original, consigne reformulée).

Simplify the fractions, then give the decimal value of

$$\frac{44}{11}+\frac{110}{44}+\frac{44}{1100}.$$

Corrigé

Simplify each quotient first :

$$\frac{44}{11}=4,\qquad \frac{110}{44}=\frac{5}{2}=2.5,\qquad \frac{44}{1100}=\frac{1}{25}=0.04.$$

Therefore the sum is $4+2.5+0.04=\boxed{6.54}$.

Exercice 32 ★★ AMC 8 2026 – Electric bike

Calculer Raisonner

Source : AMC 8, 2026, problem 7 (adapted English wording).

A cyclist completes two rides totaling 40 miles. The rides use $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{10}$ of one full battery charge, respectively. Assuming constant efficiency, how far can the bike travel on a full charge ?

Corrigé

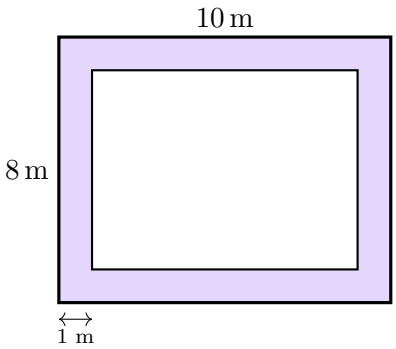
The two rides use $\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{5}{10}+\frac{3}{10}=\frac{4}{5}$ of a battery. If $\frac{4}{5}$ of a full charge gives 40 miles, then $\frac{1}{5}$ gives $40\div 4=10$ miles. A full charge gives $5\times 10=\boxed{50 \text{ miles}}$.

Exercice 33 ★★★ AMC 8 2026 – A rectangular field

Calculer Raisonner

Source : AMC 8, 2026, problem 6 (adapted English wording ; new diagram).

A rectangular field measures 10 meters by 8 meters. A one-meter-wide strip along every edge is accessible. What fraction of the whole field is accessible ?



Corrigé

The whole rectangle has area $10 \times 8 = 80\,\text{m}^2$. The inner rectangle has dimensions $10 - 2 = 8$ m and $8 - 2 = 6$ m, hence area $8 \times 6 = 48\,\text{m}^2$. The strip has area $80 - 48 = 32\,\text{m}^2$. Its fraction of the field is $\frac{32}{80} = \boxed{\frac{2}{5}}$.

Exercice 34 ★★★ AMC 8 2024 – Sneakers challenge

Calculer Raisonner

Source : AMC 8, 2024, problem 19 (adapted wording ; no multiple-choice answers).

Jordan owns 15 pairs of sneakers. Of these pairs, 9 are red and 10 are high-top. A pair can be both red and high-top. What is the **smallest possible fraction** of Jordan's sneakers that are both red and high-top ? Explain your reasoning.

Corrigé

There are $9 + 10 = 19$ memberships in the two categories but only 15 pairs in total. At least $19 - 15 = 4$ pairs must belong to both categories. This minimum is possible : 4 pairs are both red and high-top, 5 are red only, and 6 are high-top only ($4 + 5 + 6 = 15$). Thus the smallest fraction is $\boxed{\frac{4}{15}}$.

Exercice 35 Maths US – *(Find the value without solving)*

Calculer Raisonner

Source : Original challenge in the spirit of AMC 8 ; not an official AMC question.

Suppose $3a + 2b = \dfrac{4}{9}$. Without finding a or b, determine the value of $27a + 18b$. Then suppose $4u - 5v = \dfrac{2}{7}$. Find $28u - 35v$.

Corrigé

Since $27a + 18b = 9(3a + 2b)$, its value is $9 \times \frac{4}{9} = \boxed{4}$. Likewise, $28u - 35v = 7(4u - 5v) = 7 \times \frac{2}{7} = \boxed{2}$.

Exercice 36 SAT – *(Function notation)*

Calculer Raisonner

Source : Adapted from the official College Board Digital SAT Sample Questions, Math question 1 (2022) ; fractional values and instructions modified.

Let f and g be defined by

$$f(x) = x + \frac{2}{3} \qquad \text{and} \qquad g(x) = \frac{x}{3}.$$

1. Find $f(2)$ and $g(3)$.
2. Calculate $3f(2) - g(3)$. Show your work.

Corrigé

1. $f(2) = 2 + \frac{2}{3} = \boxed{\dfrac{8}{3}}$ and $g(3) = \frac{3}{3} = \boxed{1}$.
2. $3f(2) - g(3) = 3 \times \frac{8}{3} - 1 = 8 - 1 = \boxed{7}$.

Exercice 37 MATHCOUNTS – *(A busy day)*

Calculer Raisonner

Source : Adapted from MATHCOUNTS, Problem of the Week, "Holidays Are a Special Time", December 22, 2025.

During a 24-hour day, Maya spends $\frac{1}{3}$ of her time sleeping, $\frac{1}{3}$ at school and $\frac{1}{8}$ on homework.

1. What fraction of the day is left for other activities ?
2. How many hours does that represent ?
3. Maya wants to spend 2 hours reading. What fraction of the whole day will still be free after reading ?

Corrigé

1. Used time : $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}=\frac{8}{24}+\frac{8}{24}+\frac{3}{24}=\frac{19}{24}$. Remaining : $\boxed{\frac{5}{24}}$.
2. $24\times\frac{5}{24}=\boxed{5 \text{ hours}}$.
3. After 2 hours of reading, $5-2=3$ hours remain free. As a fraction of the whole day, this is $\boxed{\frac{3}{24}=\frac{1}{8}}$.

Thème VIII Devoir maison

Exercice 38 DM 1 – Une fonction à valeurs fractionnaires

Calculer Raisonner

On définit $f(x)=\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{x-2}{4}$.

1. Calculer $f(0)$, $f(2)$ et $f(-1)$ en détaillant chaque étape.
2. Écrire $f(x)$ sous la forme d'une seule fraction dont le numérateur dépend de x.
3. Trouver la valeur de x pour laquelle $f(x)=1$.
4. Deux élèves affirment que $f(2)=\dfrac{5}{3}$ et $f(2)=\dfrac{7}{3}$. Lequel a raison ? Expliquer l'erreur possible de l'autre.

Exercice 39 DM 2 – Deux programmes, un résultat commun

Modéliser Calculer Raisonner

Programme A

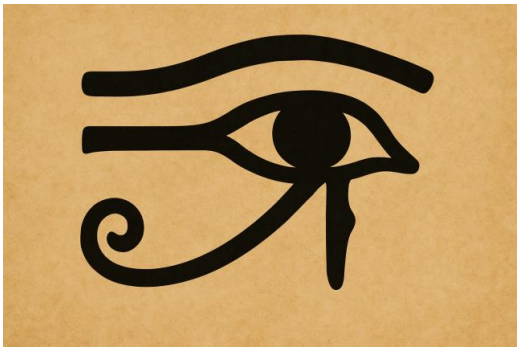
1. Choisir un nombre x.
2. Ajouter $\dfrac{2}{3}$.
3. Multiplier le résultat par 3.

Programme B

1. Choisir un nombre x.
2. Multiplier ce nombre par 2.
3. Ajouter $\dfrac{11}{3}$.

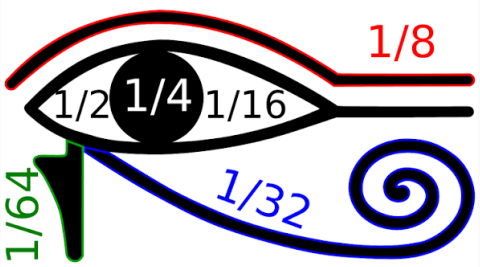
1. Écrire les résultats $A(x)$ et $B(x)$ en fonction de x.
2. Calculer $A(2)$ et $B(2)$.
3. Déterminer le nombre x pour lequel les deux programmes donnent le même résultat.
4. Imaginer un troisième programme C qui donne toujours le résultat $A(x)+\dfrac{1}{3}$. Décrire ses instructions et donner $C(x)$.

Exercice 40 DM 3 – L'Œil d'Horus et les fractions égyptiennes



Calculer Raisonner Représenter

Un œil, six fractions et un mystère



Le mystère de l'œil disparu. Dans l'Égypte antique, l'Œil d'Horus (ou Œil Oudjat) est traditionnellement associé à un système de fractions unitaires binaires (des fractions dont le dénominateur est une puissance de deux et le numérateur 1). Selon le mythe égyptien, lors d'un combat contre son oncle Seth pour venger son père Osiris, Horus perdit son œil gauche. Seth découpa cet œil en plusieurs morceaux et les jeta. C'est le dieu Thot qui rassembla les fragments pour reconstituer l'œil et rendre à Horus son intégrité. Une représentation souvent reprise aujourd'hui associe les six parties du dessin de l'Œil Oudjat à des fractions unitaires. Ce rapprochement entre l'image mythologique et les fractions est toutefois discuté par les historiens.

Une représentation traditionnelle associe à six fragments de l'œil les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ et $\frac{1}{64}$. **Mais ces six morceaux suffisent-ils vraiment à reformer un œil entier ?**

1. **Les fragments retrouvés.** Calculer la somme
$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}.$$
Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.
2. **Le morceau manquant.** Thot a-t-il retrouvé un œil entier ? Calculer $m = 1 - S$. Quelle fraction de l'œil manque-t-il ?
3. **Le secret de Thot.** Selon une interprétation de la légende, Thot fournit par magie la petite part manquante pour rendre l'œil entier. Écrire l'égalité qui traduit ce geste.
4. **Des fractions pour mesurer.** Ces six fractions sont aussi associées, dans une représentation traditionnelle, à des subdivisions d'une ancienne mesure égyptienne de capacité : le héqat. Si une mesure contient 64 petites unités identiques, combien représentent $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{64}$ de cette mesure ?
5. **À la manière des scribes.** Une fraction unitaire possède un numérateur égal à 1. Décomposer $\frac{5}{8}$ puis $\frac{11}{16}$ en sommes de fractions unitaires **distinctes**, en utilisant uniquement les six fractions indiquées sur le dessin.
6. **Défi final.** Retrouver trois fractions unitaires distinctes parmi celles de l'œil dont la somme est $\frac{7}{16}$. Justifier.

Note historique : les fractions indiquées correspondent à une interprétation traditionnelle de l'Œil d'Horus. Leur attribution exacte aux différentes parties de l'œil est discutée par les historiens.

Exercice 41 DM 4 – Le défi des fractions et des lettres

Calculer Raisonner

1. On sait que $5a + 2b = \frac{3}{7}$. Sans calculer a et b, déterminer $35a + 14b$, puis $10a + 4b$. Justifier.
2. Deux entiers naturels non nuls p et q vérifient $p + q = 66$ et $\frac{p}{q} = \frac{4}{7}$. Déterminer p et q.
3. On dispose d'une quantité inconnue de livres. On en donne $\frac{1}{4}$, puis $\frac{1}{3}$ de la quantité initiale. Il reste 30 livres. Déterminer le nombre initial de livres, en justifiant la fraction du total qui reste.
4. **Défi supplémentaire.** Trouver une valeur de x telle que $\frac{x+1}{3} + \frac{x-1}{4} = \frac{7}{4}$. Vérifier.