MATH93

Cinquième

Cours complet – méthode – démonstrations exigibles

Chapitre 2

Symétrie centrale

Version prof

Sommaire du chapitre

I Reconnaitre une symetrie centrale 2
II Symétrique d'un point 3
III Symétrique d'une figure 5
IV Proprietes de la symetrie centrale 7
V Bilan du chapitre 10

Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, on apprend à :

- reconnaître une symétrie centrale (central symmetry / point reflection) ;
- construire le symétrique d'un point par rapport à un centre ;
- construire le symétrique d'une figure ;
- utiliser les propriétés conservées par la symétrie centrale ;
- rédiger une construction ou une justification avec le vocabulaire adapté.

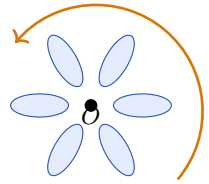
I Reconnaitre une symetrie centrale

Approche intuitive

Une symétrie centrale peut se comprendre comme un demi-tour. Pour obtenir l'image d'une figure, on fait tourner la figure de 180° autour d'un point appelé le centre de symétrie.

Définition 1 (Centre de symétrie)

Un point O est un centre de symétrie d'une figure lorsque la figure se superpose à elle-même après un demi-tour autour de O.



un demi-tour autour de O

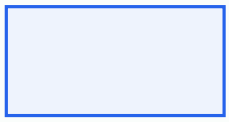
Attention

Le centre de symétrie n'est pas forcément un point de la figure. Ce qui compte, c'est le demi-tour autour de ce point.

Exercice 1 Exercice du cours

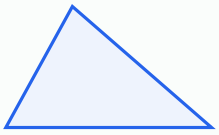
Pour chaque figure, dire si elle possède un centre de symétrie.
Quand c'est le cas, placer ce centre.

Figure 1



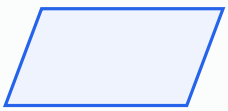
rectangle

Figure 2



triangle quelconque (scalène)

Figure 3



parallélogramme

Figure 4

cercle

Correction.

- La figure 1 possède un centre de symétrie : c'est le point d'intersection des diagonales du rectangle.
- La figure 2 ne possède pas de centre de symétrie : un demi-tour ne permet pas de la superposer à elle-même.
- La figure 3 possède un centre de symétrie : c'est le point d'intersection des diagonales du parallélogramme.
- La figure 4 possède un centre de symétrie : c'est le centre du cercle.

II Symétrique d'un point

II.1 Définition

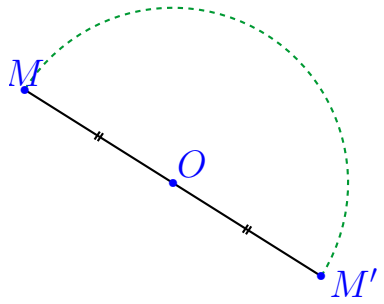
Définition 2 (Symétrie centrale ou demi-tour)

Soit O un point du plan.

Le symétrie du point M par rapport au point O est le point M' tel que :

- O est le milieu du segment [MM'].

Remarque : le symétrique du point O est lui même.



Propriété 1 (Caractérisation)

Dire que M' est le symétrique de M par rapport à O revient à dire que :

O est le *milieu* du segment $[MM']$.

Autrement dit,

$M,\ O,\ M'$ sont alignés et $OM = OM'$.

Cas particulier

Le symétrique du centre O par rapport à lui-même est O. Il ne bouge pas.

II.2 Construction

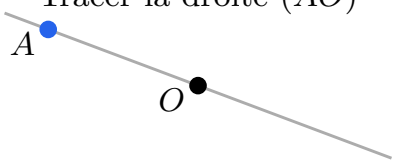
Construire le symétrique d'un point

Pour construire le symétrique A' d'un point A par rapport à un point O :

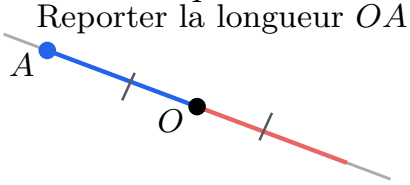
1. tracer la droite (AO) ;
2. prolonger au-delà de O ;
3. placer A' de l'autre côté de O de façon que $OA' = OA$.

Ainsi, O est le milieu de $[AA']$.

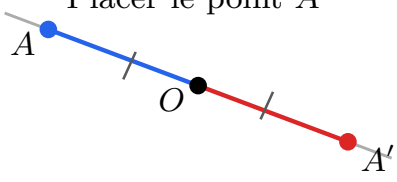
Étape 1
Tracer la droite (AO)



Étape 2
Reporter la longueur OA



Étape 3
Placer le point A'

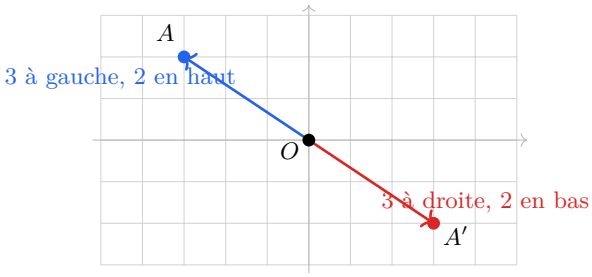


Exemple de construction avec un quadrillage

Pour construire le symétrique B' du point B par rapport à O :

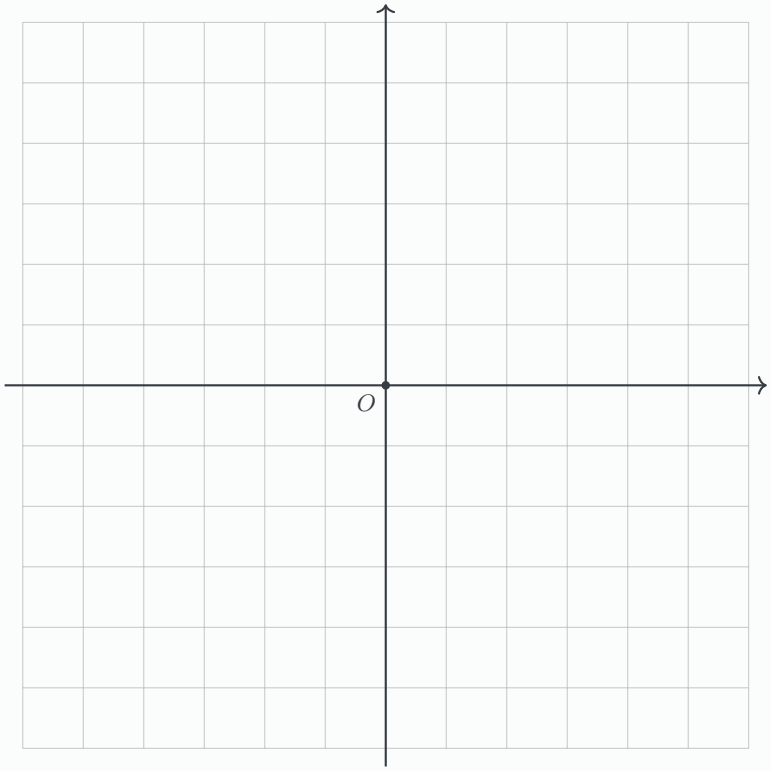
1. on trace la droite (BO) ;
2. on repère la longueur OB ;
3. on reporte cette même longueur de l'autre côté de O.

Le point obtenu est B', et le segment $[BB']$ a pour milieu le point O.



Exercice 2 Exercice du cours

Sur un quadrillage, placer un point B à 4 carreaux à gauche et 1 carreau en bas de O. Construire son symétrique B' par rapport à O.

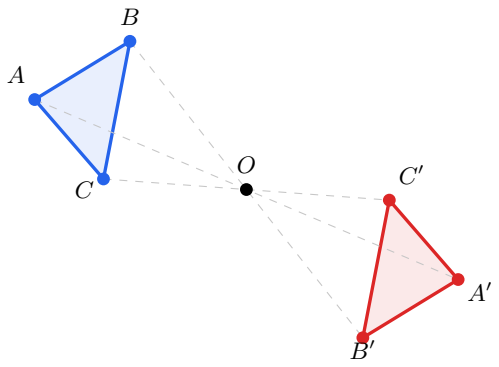


III Symétrique d'une figure

III.1 Définition

Définition 3 (Symétrique d'une figure)

Pour construire le symétrique d'une figure par rapport à un point O, on construit le symétrique de chacun des points importants de cette figure, puis on relie les points obtenus dans le même ordre.

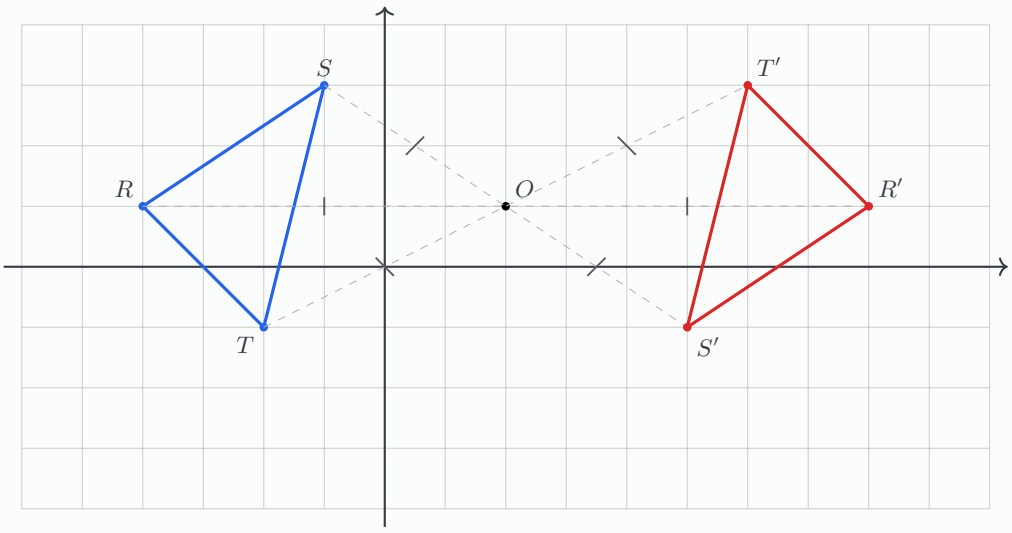


Exemple

Dans la figure ci-dessus, A', B' et C' sont les symétriques respectifs de A, B et C par rapport au point O.
Le triangle $A'B'C'$ est donc le symétrique du triangle ABC par rapport à O.

Exercice 3 Exercice du cours

Construire le symétrique d'un triangle RST par rapport à un point O placé à l'extérieur du triangle. Nommer correctement les points obtenus R', S' et T'.



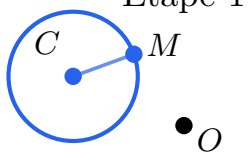
Correction.
Le symétrique du point R par rapport à O est le point R' tel que O soit le milieu de $[RR']$.
De même, O est le milieu de $[SS']$ et de $[TT']$.
On obtient donc le triangle $R'S'T'$, symétrique du triangle RST par rapport au point O.

III.2 Symétrique d'un cercle

Propriété 2 (Image d'un cercle)

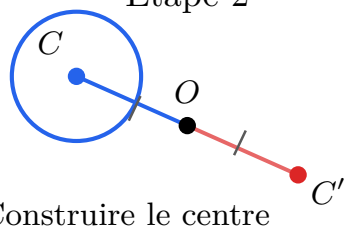
Le symétrique d'un cercle de centre C est un cercle de même rayon dont le centre est le symétrique C' de C par rapport à O.

Étape 1



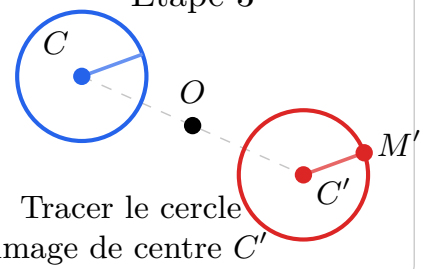
Repérer le centre C et le rayon

Étape 2



Construire le centre symétrique C'

Étape 3



Tracer le cercle image de centre C'

Exemple de construction

Pour construire le symétrique d'un cercle :

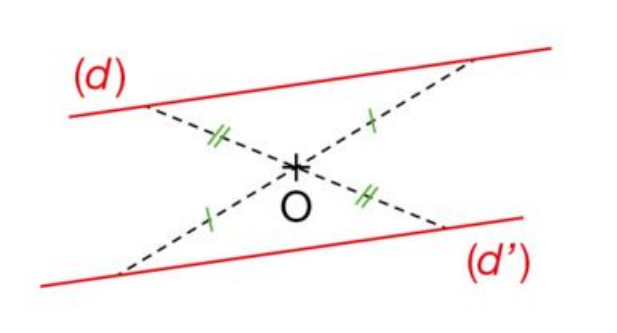
1. on construit d'abord le symétrique C' du centre C ;
2. on conserve le même rayon ;
3. on trace le cercle image de centre C'.

Si un cercle a pour centre C et pour rayon 3 cm, alors son image est un cercle de centre C' et de rayon 3 cm.

IV Proprietes de la symetrie centrale

Propriété 3 (Symétrique d'une droite)

La symétrique d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle.

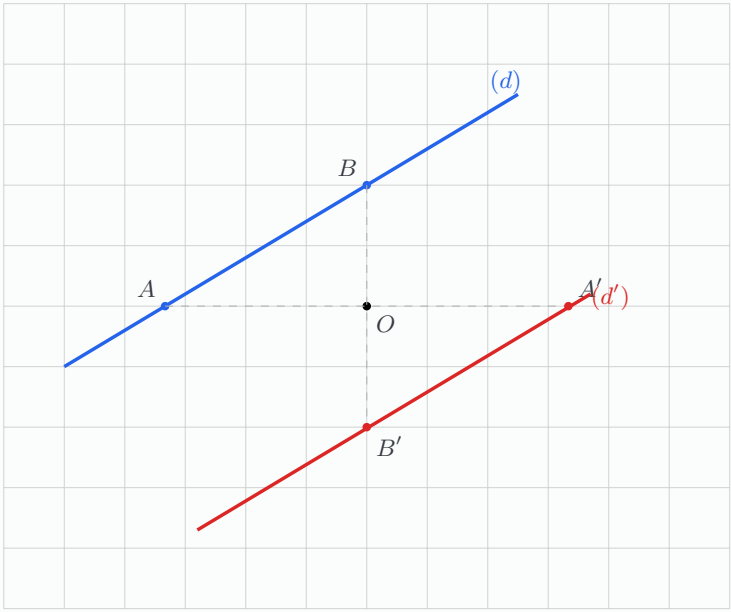


Remarque

Pour construire le symétrique d'une droite donnée, il suffit donc de construire le symétrique de 2 points distincts de cette droite.

Exercice 4 Exercice du cours

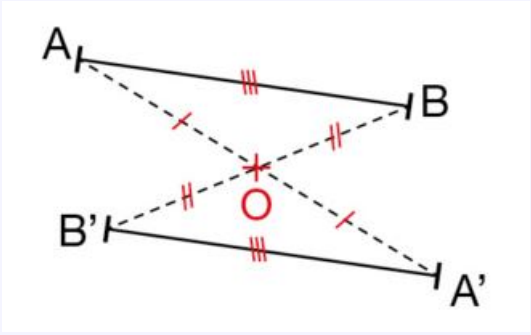
Construire le symétrique de la droite (d) par rapport au point O.



Correction.
Pour construire le symétrique d'une droite, on choisit deux points distincts de cette droite.
On choisit par exemple deux points A et B sur la droite (d).
On construit ensuite leurs symétriques A' et B' par rapport au point O.
La droite passant par A' et B' est le symétrique de la droite (d) par rapport à O.
On note cette droite (d').

Propriété 4 (Symétrique d'un segment)

Le symétrique d'un segment par une symétrie centrale est un segment parallèle et de même longueur.



Propriété 5 (Propriétés de la symétrie centrale)

La symétrie centrale conserve : les longueurs , l'alignement , le parallélisme, les mesures d'angles , les aires.
On dit que c'est une isométrie du plan.

Exercice 5 Exercice du cours

On considère une symétrie centrale de centre O.
Le triangle ISP est l'image du triangle ABC par cette symétrie centrale :

- $A \longmapsto I$
- $B \longmapsto S$
- $C \longmapsto P$

On sait que :

$$AB = 6\,\text{cm}, \qquad AC = 4\,\text{cm}, \qquad BC = 5\,\text{cm}.$$

1. Quelle est la longueur IS ? Justifiez.

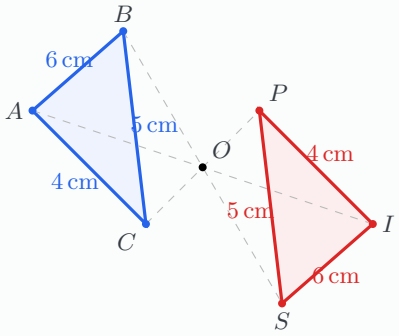
. . . . . .
. . . . . .

2. Quelle est la longueur IP ? Justifiez.

. . . . . .
. . . . . .

3. Quelle est la longueur SP ? Justifiez.

. . . . . .
. . . . . .



Correction.
Le triangle ISP est l'image du triangle ABC par une symétrie centrale.
On a donc les correspondances :

$$A \longmapsto I, \qquad B \longmapsto S, \qquad C \longmapsto P.$$

Ainsi :

$$AB \longmapsto IS, \qquad AC \longmapsto IP, \qquad BC \longmapsto SP.$$

Or une symétrie centrale conserve les longueurs.
Donc :

$$IS = AB = 6\,\text{cm},$$
$$IP = AC = 4\,\text{cm},$$

et

$$SP = BC = 5\,\text{cm}.$$

La propriété utilisée est :

La symétrie centrale conserve les longueurs.

V Bilan du chapitre

À retenir

- La symétrie centrale est un demi-tour autour d'un point.
- Le symétrique de A par rapport à O est le point A' tel que O soit le milieu de $[AA']$.
- Pour construire A', on aligne A, O et A', puis on reporte la longueur OA de l'autre côté de O.
- La symétrie centrale conserve les longueurs, l'alignement, les angles, les aires et le parallélisme.
- Le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon.

FR / US Vocabulaire et notations France / US

Les notations géométriques ne sont pas toujours les mêmes en français et dans les manuels américains.

Mot français	Mot anglais utile
symétrie centrale	central symmetry ; point reflection
symétrie centrale de centre O	point reflection through O ; point reflection about O
demi-tour	half-turn ; rotation by 180°
centre de symétrie	center of symmetry
symétrique de A	image of A ; reflected point
milieu	midpoint

Objet	Notation française	Notation fréquente US
Droite passant par A et B	(AB)	$\overleftrightarrow{AB}$ ou line AB
Segment d'extrémités A et B	$[AB]$	$\overline{AB}$ ou segment AB
Longueur du segment $[AB]$	AB	AB ou parfois $m\overline{AB}$
Demi-droite d'origine A passant par B	$[AB)$	$\overrightarrow{AB}$ ou ray AB

Notations

Dans ce cours, on garde les notations françaises :

(AB) pour une droite, $[AB]$ pour un segment, AB pour une longueur.

Phrase importante

Pour justifier qu'un point A' est le symétrique de A par rapport à O, on peut écrire :

$$A,\ O,\ A' \text{ sont alignés et } OA = OA'.$$

Donc O est le milieu de $[AA']$.

↩ Fin du cours ↪