MATH93

Cinquième

Cours complet – méthode – démonstrations exigibles

COURS

Chapitre 4

Nombres rationnels

Version prof

Sommaire du chapitre

I Ensembles de nombres et notations 2
II Fraction et quotient 3
III Fractions ègales et simplification 5
IV Comparer des fractions 6
V Additionner et soustraire des fractions 7

Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, on apprend à :

- distinguer entiers naturels, entiers relatifs, nombres décimaux et nombres rationnels *(rational numbers)* ;
- comprendre une fraction comme un **nombre quotient** *(quotient)* ;
- reconnaître et produire des fractions égales *(equivalent fractions)* ;
- comparer des fractions *(compare fractions)* ;
- additionner et soustraire des fractions *(add and subtract fractions)* ;
- résoudre des problèmes avec des fractions *(word problems involving fractions)*.

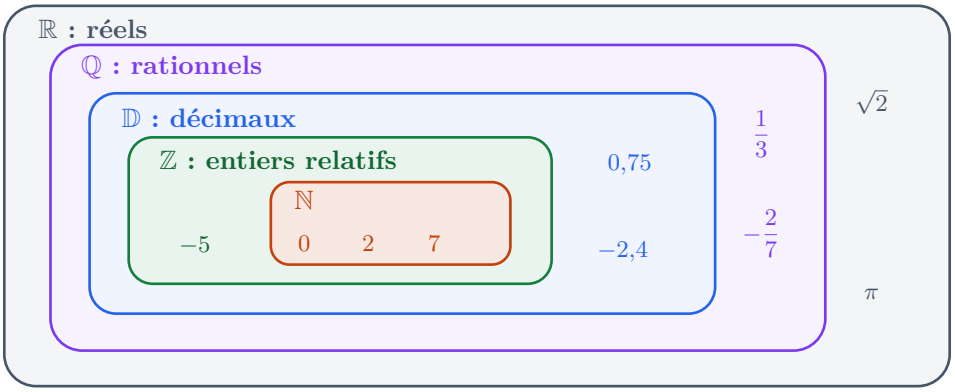
I Ensembles de nombres et notations

Pourquoi de nouveaux nombres ?

Nous connaissons déjà les nombres entiers et les nombres décimaux. Mais le partage d'une unité en trois parties égales fait apparaître le nombre $\frac{1}{3}$, qui ne peut pas s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Pour représenter exactement ce quotient, on utilise les **nombres rationnels** *(rational numbers)*.

Définition 1 (Cinq ensembles de nombres)

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels** *(whole numbers)* : $0, 1, 2, 3, \ldots$.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs** *(integers)* : $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.
- $\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux** *(terminating decimals)* : ils admettent une écriture décimale finie.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels** *(rational numbers)* : ils peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, avec a et b deux entiers relatifs et $b \neq 0$.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels** *(real numbers)*. Il contient les rationnels, mais aussi des **nombres irrationnels** *(irrational numbers)*, comme $\sqrt{2}$ et π.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Propriété 1 (Inclusions des ensembles)

Tout entier naturel est un entier relatif ; tout entier relatif est un nombre décimal ; tout nombre décimal est un nombre rationnel ; tout rationnel est un nombre réel. On écrit :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}.$$

Exemples

- $-4 \in \mathbb{Z}$, donc $-4 \in \mathbb{D}$ et $-4 \in \mathbb{Q}$, mais $-4 \notin \mathbb{N}$.
- $0{,}75 = \frac{3}{4} \in \mathbb{D}$, donc $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ car son écriture décimale $0{,}333\ldots$ ne se termine pas.
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

- $\dfrac{6}{2} = 3 \in \mathbb{N}$: **l'écriture fractionnaire ne signifie pas qu'un nombre est non entier**.

Notations et vigilance

$\in$ se lit « appartient à » *(is an element of)* ; $\notin$ se lit « n'appartient pas à » *(is not an element of)*.
Une **fraction** est une écriture d'un nombre ; ce n'est pas un ensemble séparé. Un même nombre peut avoir plusieurs écritures : $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$.

FR / US Vocabulaire France / US

Dans ce cours, $\mathbb{N}$ contient 0 et correspond aux *whole numbers* dans l'usage scolaire américain. Le terme *natural numbers* peut désigner les nombres $1, 2, 3, \ldots$ selon les manuels.

Français	**English**
entier relatif	integer
nombre décimal	terminating decimal
nombre rationnel	rational number
nombre réel	real number
nombre irrationnel	irrational number
numérateur / dénominateur	numerator / denominator
fraction égale	equivalent fraction

Exercice 1 Exercice du cours

Compléter avec $\in$ ou $\notin$.

$$-6 \ \in \ \mathbb{Z}, \quad \frac{3}{5} \ \in \ \mathbb{D}, \quad \frac{2}{3} \ \notin \ \mathbb{D}, \quad \frac{9}{4} \ \in \ \mathbb{Q}.$$

Correction. On a $-6 \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{3}{5} = 0{,}6 \in \mathbb{D}$; $\dfrac{2}{3} \notin \mathbb{D}$ car son écriture décimale est infinie périodique ; $\dfrac{9}{4} \in \mathbb{Q}$ car 9 et 4 sont entiers et $4 \neq 0$.

À retenir

Tous les nombres décimaux sont rationnels, mais tous les rationnels ne sont pas décimaux. Par exemple $\dfrac{1}{4} = 0{,}25$ est décimal, tandis que $\dfrac{1}{3}$ ne l'est pas.

II Fraction et quotient

Un partage qui ne donne pas un nombre décimal

Trois amis se partagent **2 pizzas** de manière à recevoir la même quantité. Chacun reçoit exactement $\dfrac{2}{3}$ de pizza. La fraction $\dfrac{2}{3}$ désigne un **nombre** : le quotient de 2 par 3.

Définition 2 (Fraction et quotient)

Soient a et b deux entiers, avec $b \neq 0$. Le **quotient** *(quotient)* de a par b est le nombre, noté $\frac{a}{b}$, qui, multiplié par b, donne a :

$$\boxed{\frac{a}{b} \times b = a \qquad (b \neq 0).}$$

Dans l'écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$:

- a est le **numérateur** *(numerator)* ;
- b est le **dénominateur** *(denominator)* ;
- la barre de fraction correspond à une **division** *(division)*.

$\frac{3}{4}$ — numérateur *(numerator)* ; dénominateur *(denominator)*

Propriété 2 (Une fraction est un nombre)

Une fraction peut avoir une **écriture décimale finie** ou **infinie**. Par exemple :

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 \qquad \text{mais} \qquad \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

Dans les deux cas, la fraction donne la **valeur exacte** du quotient.

Exemples

- $\frac{7}{4} = 7 \div 4 = 1{,}75$ et $1{,}75 \times 4 = 7$.
- $\frac{12}{3} = 4$: un quotient peut être un entier.
- $\frac{2}{3}$ est le nombre qui, multiplié par 3, donne 2 ; il ne faut pas remplacer sa valeur exacte par 0,67.
- $\frac{-5}{2} = -2{,}5$: un quotient peut être négatif.

Attention au dénominateur

On ne peut **jamais diviser par zéro** *(division by zero)*. L'écriture $\frac{5}{0}$ n'a donc pas de sens.

Exercice 2 Exercice du cours

Compléter les ègalités, puis dire si chaque quotient est un entier, un nombre décimal non entier ou un rationnel non décimal.

$$\frac{15}{3} = 5, \quad \frac{7}{2} = 3{,}5, \quad \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots.$$

Correction. $\frac{15}{3} = 5$ est entier ; $\frac{7}{2} = 3{,}5$ est décimal non entier ; $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ est rationnel non décimal.

III Fractions ègales et simplification

Propriété 3 (Obtenir des fractions ègales)

On ne change pas la valeur d'un quotient lorsqu'on **multiplie ou divise** son numérateur et son dénominateur par un **même nombre non nul** :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}} \quad \text{si } b \neq 0 \text{ et } k \neq 0.$$

Lorsque a et b sont tous deux divisibles par un même entier non nul k :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}}.$$

On obtient ainsi des **fractions ègales** *(equivalent fractions)*.

Deux façons d'écrire le même nombre

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8} \quad \text{et} \quad \frac{18}{24} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6} = \frac{3}{4}.$$

La première ègalité donne une fraction ègale avec un plus grand dénominateur ; la seconde **simplifie** *(simplify a fraction)* la fraction.

Définition 3 (Simplifier une fraction)

Simplifier une fraction *(reduce a fraction)*, c'est diviser son numérateur et son dénominateur par un **même diviseur commun** strictement supérieur à 1.

Simplification par ètapes

$$\frac{36}{48} = \frac{36 \div 2}{48 \div 2} = \frac{18}{24} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

On peut aussi diviser directement 36 et 48 par 12.

Une erreur à èviter

On ne simplifie **jamais** en retirant ou en divisant un seul terme du numérateur sans faire la même opération sur tout le numérateur et le dénominateur. Par exemple $\frac{2+4}{2+6} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, et non $\frac{1+4}{1+6}$.

Exercice 3 Exercice du cours

Compléter les nombres manquants et simplifier la dernière fraction.

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}, \qquad \frac{18}{30} = \frac{3}{5}, \qquad \frac{42}{56} = \frac{3}{4}.$$

Correction. $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ (on multiplie par 3) ; $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ (on divise par 6) ; $\frac{42}{56} = \frac{3}{4}$ (on divise par 14).

À retenir

Une fraction désigne un quotient exact. Pour obtenir une fraction ègale, on multiplie ou on divise le numérateur **et** le dénominateur par un même nombre non nul.

IV Comparer des fractions

Définition 4 (Comparer deux fractions)

Comparer deux fractions *(compare fractions)*, c'est déterminer si la première est inférieure, ègale ou supérieure à la seconde. On utilise les symboles $<$, $=$ et $>$.

Propriété 4 (Fractions de même dénominateur positif)

Pour comparer deux fractions de **même dénominateur strictement positif**, on compare leurs numérateurs :

$$\boxed{\text{si } b>0 \text{ et } a<c, \quad \frac{a}{b}<\frac{c}{b}.}$$

Comparer des fractions de même dénominateur

Comme $3<7$, on a $\frac{3}{8}<\frac{7}{8}$. De même, comme $-5<-2$, on a $-\frac{5}{9}<-\frac{2}{9}$.

Propriété 5 (Fractions de même numérateur positif)

Pour comparer deux fractions **positives de même numérateur**, plus le dénominateur est grand, plus la fraction est petite.

$$\boxed{0<a, \quad 0<b<c \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{c}<\frac{a}{b}.}$$

Comparer des fractions de même numérateur

$\frac{3}{5}<\frac{3}{4}$, car partager 3 unités en 5 parts par unité donne une quantité plus petite que les partager en 4 parts par unité.

Propriété 6 (Fractions de dénominateurs différents)

Pour comparer des fractions de dénominateurs différents, on peut **les mettre au même dénominateur positif** *(find a common denominator)*, puis comparer leurs numérateurs.

Comparer $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{6}$

1. Mettre au même dénominateur :

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times 3}{4\times 3}=\frac{9}{12} \qquad \text{et} \qquad \frac{5}{6}=\frac{5\times 2}{6\times 2}=\frac{10}{12}.$$

2. Comparer puis conclure : puisque $9 < 10$, on a

$$\boxed{\frac{3}{4} < \frac{5}{6}}.$$

Comparer des fractions de signes différents

Tout nombre négatif est inférieur à tout nombre positif. Par exemple $-\frac{2}{5} < \frac{1}{3}$. Quand les deux fractions sont négatives, il faut faire attention au sens de la comparaison : $-\frac{3}{4} < -\frac{1}{2}$.

Exercice 4 Exercice du cours

Compléter avec $<$, $=$ ou $>$, en justifiant le dernier cas par une mise au même dénominateur.

$$\frac{5}{7} \ldots \frac{6}{7}, \qquad \frac{4}{11} \ldots \frac{4}{9}, \qquad \frac{2}{3} \ldots \frac{5}{8}.$$

Correction. $\frac{5}{7} < \frac{6}{7}$ car $5 < 6$; $\frac{4}{11} < \frac{4}{9}$ car $11 > 9$. Enfin $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$ et $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$, donc $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$.

À retenir

Pour comparer des fractions, on peut les transformer en **fractions de même dénominateur positif**. On compare ensuite les **numérateurs**.

V Additionner et soustraire des fractions

Propriété 7 (Même dénominateur)

Pour **additionner** *(add fractions)* ou **soustraire** *(subtract fractions)* deux fractions ayant le **même dénominateur non nul**, on conserve ce dénominateur et on additionne ou on soustrait les numérateurs :

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}} \quad (b \neq 0).$$

Addition et soustraction : même dénominateur

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3+2}{8} = \boxed{\frac{5}{8}} \qquad \text{et} \qquad \frac{7}{10} - \frac{9}{10} = \frac{7-9}{10} = \boxed{-\frac{1}{5}}.$$

Propriété 8 (Dénominateurs différents)

Pour additionner ou soustraire des fractions de dénominateurs différents, on commence par les **mettre au même dénominateur** *(common denominator)*. On applique ensuite la règle précédente et, si possible, on **simplifie** le résultat.

Calculer $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}$

1. Mettre au même dénominateur :

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 4}{3\times 4}=\frac{8}{12},\qquad \frac{5}{4}=\frac{5\times 3}{4\times 3}=\frac{15}{12}.$$

2. Additionner les numérateurs :

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{8}{12}+\frac{15}{12}=\boxed{\frac{23}{12}}.$$

Soustraire et simplifier

$$\begin{aligned}\frac{5}{6}-\frac{1}{4}&=\frac{5\times 2}{6\times 2}-\frac{1\times 3}{4\times 3}\\&=\frac{10}{12}-\frac{3}{12}\\&=\boxed{\frac{7}{12}}.\end{aligned}$$

Une soustraction avec un nombre négatif

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}-\left(-\frac{2}{3}\right)&=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\\&=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}\\&=\boxed{\frac{11}{12}}.\end{aligned}$$

On retrouve la règle des nombres relatifs : **soustraire un nombre négatif revient à ajouter son opposé**.

Erreur classique

On **n'additionne pas les dénominateurs** :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\neq\frac{2}{5}.$$

En réalité, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\boxed{\frac{5}{6}}$.

Exercice 5 Exercice du cours

Calculer, en détaillant la mise au même dénominateur si nécessaire, puis simplifier.

$$A=\frac{7}{12}+\frac{1}{12},\qquad B=\frac{3}{4}-\frac{1}{6},\qquad C=-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}.$$

Correction.

$$A = \frac{7+1}{12} = \frac{8}{12} = \boxed{\frac{2}{3}},$$
$$B = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \boxed{\frac{7}{12}},$$
$$C = -\frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \boxed{-\frac{1}{10}}.$$

À retenir

Addition et soustraction : même dénominateur d'abord, puis opération sur les numérateurs. **Ne jamais additionner ni soustraire les dénominateurs.**

V.1 Maths US : nombres fractionnaires *(mixed numbers)*

FR / US Maths US – *(Mixed numbers)*

Convention américaine. Aux États-Unis, on rencontre souvent les **nombres fractionnaires** *(mixed numbers)* : cette écriture, qui associe un entier et une fraction, n'est pas la notation usuelle du cours français.

Définitions *(Definitions)***.**

- Une **fraction propre** *(proper fraction)* est une fraction positive dont le numérateur est strictement inférieur au dénominateur (par exemple $\frac{3}{4}$).
- Une **fraction impropre** *(improper fraction)* est une fraction positive dont le numérateur est supérieur ou égal au dénominateur (par exemple $\frac{11}{4}$).
- Un **nombre fractionnaire** *(mixed number)* est composé d'une **partie entière** *(whole-number part)* et d'une **partie fractionnaire propre** *(proper fractional part)*. Par convention, les deux parties s'**additionnent** :

$$\boxed{2\,\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}.}$$

Attention : $2\,\frac{3}{4}$ ne signifie **pas** $2 \times \frac{3}{4}$. Pour les valeurs négatives, le signe porte sur l'ensemble :

$$-2\,\frac{1}{3} = -\left(2 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{3}$$

Propriété 9 (Convertir un nombre fractionnaire *(convert a mixed number)*)

Pour $a \in \mathbb{N}$, $b, c \in \mathbb{N}$ avec $0 < b < c$:

$$\boxed{a\,\frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}}.$$

Inversement, si n, d sont des entiers positifs et $d \neq 0$, on effectue la division euclidienne $n = qd + r$, avec $0 \leq r < d$:

$$\frac{n}{d} = q + \frac{r}{d}.$$

Si $r \neq 0$, cela s'écrit $q\,\frac{r}{d}$ en notation américaine.

Deux conversions *(two conversions)*

(Mixed to improper fraction)

$$3\,\frac{2}{5} = \frac{3\times 5+2}{5} = \boxed{\frac{17}{5}}.$$

(Improper fraction to mixed) $19 = 4\times 4+3$, donc :

$$\frac{19}{4} = 4+\frac{3}{4} = \boxed{4\,\frac{3}{4}}.$$

Exercice 6 À vous de jouer – *(Your turn)*

Convertir sans utiliser de valeurs approchées :

a) $1\,\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ b) $\frac{23}{6} = 3\,\frac{5}{6}$.

Correction. $1\,\frac{2}{3} = \frac{1\times 3+2}{3} = \frac{5}{3}$. Comme $23 = 3\times 6+5$, on obtient $\frac{23}{6} = 3\,\frac{5}{6}$.

Fin du cours