E3a 2013 PSI Maths B (4 heures, calculatrices interdites)

Exercice 1

1) $4x = y^2$.

2) Γ est donc une parabole, d'axe (Ox) et de sommet l'origine (la question est ambigüe, faut-il mentionner foyer, directrice, paramètre...?)

3) En M un vecteur tangent est $(2t, 2)$ ou mieux $(t, 1)$. Un point M de coordonnées (x, y) appartient donc à la tangente si et seulement si $\overrightarrow{M(t)M}$ est colinéaire à ce vecteur tangent, i.e. si le déterminant $\begin{vmatrix} x-t^2 & y-2t \\ t & 1 \end{vmatrix}$ est nul, ce qui donne

$$x - ty + t^2 = 0 \qquad (T)$$

4) Déterminons la projection H de F sur la droite précédente. $\overrightarrow{FH}$ doit être orthogonal au vecteur tangent $(t, 1)$, d'où la condition $t(x-1) + y = t\,x + y - t = 0$ à conjoindre à l'équation de la tangente. Ce système se résoud avec la solution évidente $x = 0, y = t$: on trouve donc l'axe (Oy) comme podaire du foyer.

5.1) Calcul similaire, on écrit $tx + y = 0$ cette fois et on trouve

$$(x, y) = \left(-\frac{t^2}{t^2+1}, \frac{t^3}{t^2+1}\right)$$

5.1) Cette courbe est bien définie pour tout t réel, on a une asymptote verticale $x = -1$ quand $t \to \infty$ car $x \to -1$ et $y \to \pm\infty$. En 0 on a un magnifique point de rebroussement (de première espèce) puisque $x \sim -t^2, y \sim t^3$. D'où le dessin :

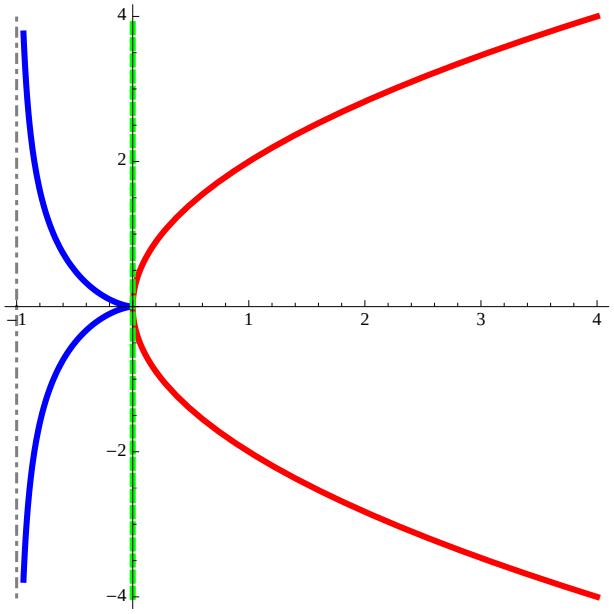

FIG. 1 – Parabole avec deux podaires

Exercice 2

Partie A

1) $D = \mathbb{R}^*$ car pour $x \neq 0$ le terme général est un $O(1/n^2)$.

2) L'énoncé incite à ne pas calculer de dérivée (question suivante). On peut en effet observer que chaque terme de la série est décroissant pour $x > 0$, il en est donc de même pour leur somme f.

3) On a une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, qui converge simplement d'après **1)**, et la série des dérivées, $\left(\sum \dfrac{-2n^2x}{(1+(nx)^2)^2}\right)$, converge uniformément car normalement sur tout compact $[\alpha, \beta] \subset I$ puisque

$$\left|\frac{-2n^2x}{(1+(nx)^2)^2}\right| \leqslant \frac{2n^2\beta}{n^4\alpha^4} = \frac{2\beta}{n^2\alpha^4}$$

et ce dernier terme est celui d'une série de Riemann convergente.
Le théorème de dérivation terme à terme s'applique donc, et on a

$$f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{-2n^2x}{(1+(nx)^2)^2} \quad \text{qui est bien négative !)}$$

4) Pour ne pas utiliser de théorème trop puissant (double limite...) on peut simplement remarquer que

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2x^2} = \frac{1}{x^2} \times C^{te} \to 0$$

ce qui donne la limite (nulle) de f en $+\infty$.

5.1) L'inégalité résulte de la décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2x^2}$ sur l'intervalle $[p, p+1]$.

5.2) En sommant l'inégalité précédente pour $p \in \mathbb{N}$ il vient

$$f(x) \leqslant \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} = \frac{\pi}{2x} \leqslant 1 + f(x) \quad \text{(le 1 apparaît à droite quand } p = 0)$$

On en déduit un encadrement de $f(x)$ entre $\dfrac{\pi}{2x} - 1$ et $\dfrac{\pi}{2x}$, qui sont donc équivalents à $f(x)$ puisque $xf(x) \to \dfrac{\pi}{2}$ quand $x \to 0$.

6) Le graphe de f ressemble donc fort à une demi-hyperbole.

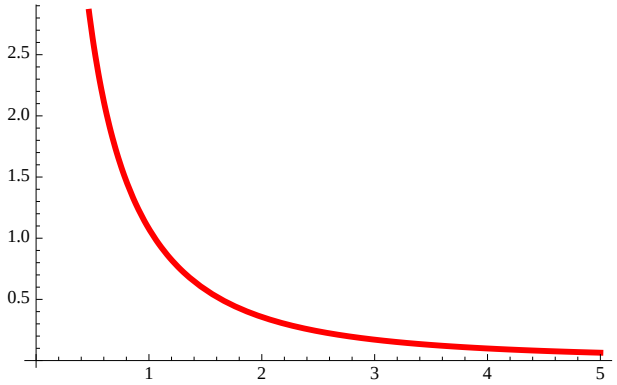

FIG. 2 – Graphe de f

Partie B

1) L'intégrande est bien continu sur $]0, +\infty[$, on étudie aux bornes :

- quand $t \to 0$, un DL donne comme équivalent $\dfrac{\sin t}{e^{xt}-1} \to \dfrac{1}{x}$, donc on peut prolonger par continuité.
- en $+\infty$ l'intégrande vérifie $\left|\dfrac{\sin t}{e^{xt}-1}\right| \leqslant \dfrac{1}{e^{xt}-1} \sim e^{-xt}$ qui est intégrable (on peut comparer à $1/t^2$ si on y tient) pour tout $x > 0$, ce qui donne bien l'existence de l'intégrale proposée.

2) Il faut appliquer un théorème du cours avec une condition de domination. Cette condition est délicate et nécessite de circonscrire x à un compact $[\alpha, \beta] \subset I$; on a alors

$$\left|\frac{\sin t}{e^{xt}-1}\right| \leqslant \frac{1}{e^{\alpha t}-1}$$

qui est bien intégrable comme mentionné *supra*. Comme par ailleurs l'intégrande est fonction continue de deux variables, le théorème susmentionné donne la continuité de φ.

3.1a) L'intégrande, continu, vérifie la majoration $|e^{-kxt}\sin t| \leqslant e^{-kxt}$ et cette dernière fonction est notoirement intégrable sur $[0+\infty[$.

3.1b) Le calcul résulte de deux intégrations par parties successives, que j'écris directement sur l'intervalle $[0,+\infty[$ parce que les crochets sont bien convergents ainsi que toutes les intégrales intermédiaires :

$$\int_0^\infty e^{-kxt}\sin t\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-kxt}\cos t\right]_0^\infty - \int_0^\infty kxe^{-kxt}\cos t\,\mathrm{d}t = 1 - kx\left(\left[-e^{-kxt}\sin t\right]_0^\infty + \int_0^\infty kxe^{-kxt}\sin t\,\mathrm{d}t\right)$$

soit $J_k = 1 - k^2x^2J_k$ d'où le résultat demandé.

3.2) La série de fonctions $\left(\sum_{n\geqslant 1} e^{-kxt}\sin t\right)$ est une série géométrique de fonctions continues, qui converge simplement vers $\dfrac{e^{-xt}\sin t}{1-e^{-xt}} = \dfrac{\sin t}{e^{xt}-1}$, notre intégrande (continu). Le théorème sur la série des intégrales des valeurs absolues ne s'appliquant pas, il faut recourir au théorème de convergence dominée, ou revenir à la définition de l'intégration terme à terme. En effet, une somme partielle de la série étant $\dfrac{(e^{-xt}-e^{-(n+1)xt})\sin t}{1-e^{-xt}} = \dfrac{(1-e^{-nxt})\sin t}{e^{xt}-1}$, on peut la majorer en valeur absolue par $\dfrac{|\sin t|}{e^{xt}-1} \leqslant \dfrac{|\sin t|}{e^{\alpha t}-1}$, intégrable, pour tout $x\in[\alpha,+\infty[$ ce qui permet de passer à la limite sous l'intégrale.
Alternativement, on peut montrer que l'intégrale du reste de la série tend vers 0.
NB : sans indication de méthode, cette question paraît difficile pour le public visé par ce concours.
En d'autres termes, on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{e^{xt}-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sum_{n\geqslant 1} e^{-kxt}\sin t\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-kxt}\sin t\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+n^2x^2}$$

càd que $\varphi(x) = f(x)$.

Exercice III

1.1) La formule (P) donne immédiatement $\|x\|^2 = \sum 0 = 0$.

1.2) Il est tentant d'utiliser la formule du double orthogonal, mais elle est proscrite puisque *l'on ne sait pas encore* que E est de dimension finie. Il faut, ce me semble, constater que tout vecteur x de E est égal à sa projection orthogonale sur F (celle-ci existe bien puisque F est de dimension finie) puisque d'après la question précédente la différence entre x et sa projection est nulle. Ceci prouve bien que E se réduit à F.

2) Posons déjà $x = e_j$, on trouve

$$\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_j \mid e_i)^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{i=1, i\neq j}^n (e_j \mid e_i)^2 \geqslant \|e_j\|^4$$

et donc, compte tenu de $1 \leqslant \|e_j\|^2 \leqslant \|e_j\|^4$, on doit avoir $(e_j \mid e_i)^2 = 0$ pour tout $i \neq j$, ce qui exprime l'orthogonalité de la famille. De plus il faut que $\|e_j\|^2 = \|e_j\|^4$ ce qui donne $\|e_j\|^2 = 1$ i.e. la famille est orthonormale. C'est donc une famille libre de F qu'elle engendre, i.e. c'en est une base orthonormale.

3.1) C'est alors une base de F et d'après **1)** on a $F = E$.

3.2) Par exemple, $4(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$.

3.3) On part de l'identité précédente :

$$\begin{aligned} 4(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= \sum_{i=1}^n (x+y \mid e_i)^2 - (x+y \mid e_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(x \mid e_i) + (y \mid e_i)]^2 - [(x \mid e_i) - (y \mid e_i)]^2 = \sum_{i=1}^n 4\,(x \mid e_i)\times(y \mid e_i) \qquad QED \end{aligned}$$

3.4) Le terme en position (i,j) de A^2 est, par définition de A et du produit matriciel,

$$\sum_{k=1}^n (e_i \mid e_k)\times(e_k \mid e_j)$$

qui vaut $(e_i \mid e_j) = a_{i,j}$ d'après la relation établie à la question précédente. Ceci prouve bien que $A^2 = A$. Donc A est la matrice d'une projection.

3.5) a est donc défini par les conditions : $a(e_j) = \sum_{i=1}^n (e_i \mid e_j) e_i$
($a(e_j)$ est le j^e vecteur colonne de A exprimé dans la base $\mathcal{B}$).
Soit $x \in \ker a$: posons $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, on a

$$a(x) = 0 = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n (e_i \mid e_j) e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_j (e_i \mid e_j) \right) e_i = \sum_{i=1}^n \left((e_i \mid \sum_{j=1}^n x_j e_j) \right) e_i = \sum_{i=1}^n (x \mid e_i) e_i$$

Il faut alors appliquer la question **3.3)**, et pour ce faire effectuer le produit scalaire par x. On obtient

$$0 = (0 \mid x) = \sum_{i=1}^n (x \mid e_i)(x \mid e_i) = \|x\|^2$$

Donc a est un endomorphisme injectif, donc bijectif (dimension finie).

3.6) On a une situation étonnante : a est un projecteur injectif ! Il n'en est qu'un, c'est l'identité. Donc $A = I_n$, ce qui par définition de A signifie que la famille $\mathcal{B}$ est orthonormale (on a $(e_i \mid e_j) = \delta_i^j$).

Exercice IV

1) Pour $X \neq 0$ on pose $X = \|X\| Y$ et comme $\|AY\| \leqslant \mathcal{N}(A)$ puisque $\|Y\| = 1$, c'est par proportionnalité que $\|AX\| = \|A.(\|X\|Y)\| = \| \|X\| A.Y\| = \|X\| \|AY\| \leqslant \mathcal{N}(A)\|X\|$.

2) La question (redé)montre que $\mathcal{N}(A)$ est le sup du rapport $\dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$ (pour $X \neq 0$). Cette quantité étant invariante par homothétie sur X, il suffit de rechercher son sup quand $\|X\| = 1$, c'est à dire sur la sphère unité. Or cette dernière est compacte et l'application $X \mapsto \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$ étant continue, atteint son maximum sur ce compact c'est à dire qu'il existe X_0 de norme 1, tel que $\mathcal{N}(A) = \dfrac{\|AX_0\|}{\|X_0\|} (= \|AX_0\|$ d'ailleurs !)

3) On a pour tout vecteur X, $\|I_n X\| = \|X\|$! donc le rapport étudié dans la question précédente est constant et vaut 1, ainsi que son sup i.e. $\mathcal{N}(I_n) = 1$.

4) En dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

5) "Borné" signifie "inclus dans une boule". Ici d'ailleurs on peut préciser que pour tout $A \in G$ on a $\|A\| = \|A - I + I\| \leqslant 1 + 1 = 2$.

6.1) Parce que G est un groupe (stable par multiplication et passage à l'inverse).

6.2) Si λ était nul, A ne serait pas inversible ce qui est incompatible avec la question précédente notamment.
Par une récurrence immédiate on a $A^k X = \lambda^k X$ pour $k \in \mathbb{N}$; la propriété reste vraie pour $k \in \mathbb{Z}$, soit qu'on effectue une récurrence sur $|k|$, soit en écrivant $X = A^{-k} A^k X = A^{-k} \lambda^k X = \lambda^k A^{-k} X$ pour $k \in \mathbb{N}$.

6.3) D'après **1)** on a

$$\|(A^k - I)X\| \leqslant \mathcal{N}(A^k - I)\|X\| \leqslant \|X\|$$

Donc $\|(A^k - I)X\| = \|(\lambda^k - 1)X\| \leqslant \|X\|$ d'où $|\lambda^k - 1| \leqslant 1$ en divisant par $\|X\| \neq 0$.
La deuxième forme de l'inégalité triangulaire donne $\big||\lambda|^k - 1\big| \leqslant |\lambda^k - 1|$ (i.e. l'application module est 1-lipschitzienne !) d'où finalement $\big||\lambda|^k - 1\big| \leqslant 1$.

6.4) Supposons pour fixer les idées que $|\lambda| > 1$. Alors quand $k \to +\infty$ le membre de gauche de l'inégalité précédente tend vers ∞, ce qui est absurde. Si au contraire $|\lambda| < 1$ on fait tendre k vers $-\infty$ (ce qui revient à travailler sur A^{-1} au lieu de A) pour le même résultat. Donc il est impossible que $|\lambda| \neq 1$, i.e. $|\lambda| = 1$.

6.5) Notons le lemme général $\forall z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$, qui donne en particulier ici

$$|\operatorname{Re}(\lambda^k - 1)| = |\cos(k\theta) - 1| \leqslant |\lambda^k - 1| \leqslant 1.$$

Comme cette relation est impossible si $\cos(k\theta) < 0$ – on aurait alors $|\cos(k\theta) - 1| = -\cos(k\theta) + 1 > 1$ – c'est que $\cos(k\theta) \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

6.6) Rappelant que $\theta \in [-\pi, \pi]$, la condition $\cos\theta \geqslant 0$ impose plus précisément $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Comme $2\theta \in [-\pi, \pi]$, la condition $\cos(2\theta) \geqslant 0$ impose plus précisément $2\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ i.e. $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$.
Supposons démontré que $\theta \in [-\pi/2^q, \pi/2^q]$. Comme $2^q\theta \in [-\pi, \pi]$, la condition $\cos(2^q\theta) \geqslant 0$ impose plus précisément $2^q\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ i.e. $\theta \in [-\pi/2^{q+1}, \pi/2^{q+1}]$, ce qui montre que la propriété est héréditaire. Nous l'avons donc démontrée par récurrence sur q.

6.7) Finalement quand $q \to +\infty$ il reste $\theta \in [0, 0]$, i.e. $\lambda = 1$.

7.1)

Toutes sections sauf PSI

Une matrice *complexe* non diagonalisable est néanmoins trigonalisable. Comme son spectre est réduit à 1, cela signifie que A est semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$ car sinon T serait diagonale.

Argument conforme au programme PSI

Puisque 1 est valeur propre, on peut considérer une base de $\mathbb{C}^2$ qui commence par un vecteur propre (complétée par tout vecteur non colinéaire).

A est donc semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et par identification des polynômes caractéristiques il faut que $\mu = 1$. a est alors non nul car sinon T serait diagonale.

NB : on espère que les candidats PSI auxquels étaient destinés cette épreuve et qui auraient utilisé la CNS de trigonalisabilité n'auront pas été trop pénalisés sur ce point obscur d'incohérence entre les programmes des diverses sections.

7.2) Une récurrence facile permet de vérifier la relation $T^m = \begin{pmatrix} 1 & m\,a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Petit piège, $\mathcal{N}_\infty(T^m)$ n'est pas toujours $|m\,a|$, ce n'est le cas que si $|m\,a| \geqslant 1$ (en particulier c'est vrai pour m assez grand) : $\mathcal{N}_\infty(T^m) = \mathrm{Max}(1, |m\,a|)$.

7.3) Comme $|m\,a| \to +\infty$ on a bien $\mathcal{N}_\infty(T^m) \to +\infty$ et d'après la question **4** on en déduit $\mathcal{N}(T^m) \to +\infty$. Or $T = PAP^{-1}$ pour une certaine matrice inversible P, d'où

$$\mathcal{N}(T^m) = \mathcal{N}(PA^mP^{-1}) \leqslant \mathcal{N}(P).\mathcal{N}(A^m).\mathcal{N}(P^{-1})$$

et donc $\mathcal{N}(A^m) \to +\infty$ aussi.

7.4) Ceci niant le caractère borné de G, A ne peut être non diagonalisable. Donc A est diagonalisable.

7.5) Il y a peu de matrices diagonalisables dont le spectre soit limité à 1 : $G = \{I_2\}$.