Math93.com

CRPE 2019 - Académie de Paris
Correction Paris

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Première partie (13 points)

A. Situation des trois carrés

1. **Vérifier que la somme des aires des deux carrés gris est égale à l'aire du carré blanc.**

    - L'aire du carré gris de 3 cm de côtés est : $A_1 = 9 \text{ cm}^2$;
    - L'aire du carré gris de 4 cm de côtés est : $A_2 = 16 \text{ cm}^2$;
    - L'aire du carré blanc de 5 cm de côtés est : $A_3 = 25 \text{ cm}^2$;
    - Conclusion : on a bien
    $$A_1 + A_2 = 9 + 16 = 25 = A_3$$

2. **Claude affirme : « Si on dispose les trois carrés obtenus à la question précédente comme sur la figure 1 ci-dessous alors le triangle ABC est un triangle rectangle. » L'affirmation de Claude est-elle vraie ou fausse? Justifier la réponse.**

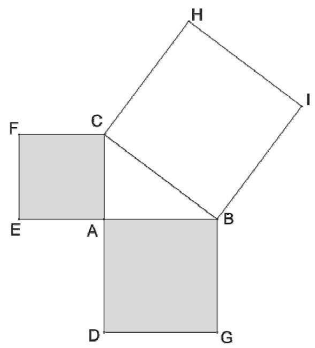


Figure 1

Dans la figure 1, le triangle ABC est tel que $AC = 3$ cm, $AB = 4$ cm et $BC = 5$ cm. Si le triangle BCA est rectangle, c'est forcément en A car $[BC]$ est le plus grand côté. On a:

D'une part :		et	D'autre part :	
BC^2	$= 5^2$		$BA^2 + CA^2$	$= 4^2 + 3^2$
BC^2	$= 25$		$BA^2 + CA^2$	$= 16 + 9$
			$BA^2 + CA^2$	$= 25$

Conclusion : $BC^2 = BA^2 + CA^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BCA est rectangle en A.

3. Avec les mêmes carrés, Dominique affirme : « Sur la figure 2 ci-dessous, les longueurs exactes, en centimètre, des segments [MN] et [IJ] sont des nombres décimaux ». L'affirmation de Dominique est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

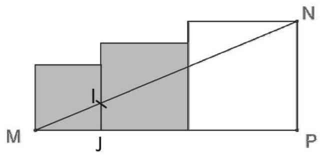


Figure 2

- Calcul de MN.
  Le triangle MNP est rectangle en P si l'on suppose que les points M, J et P sont alignés (ce que l'énoncé ne précise pas). Par ailleurs, $NP = 5$ cm et en supposant toujours que $J \in [MP]$ on a :

$$MP = 3+4+5 = 12 \text{ cm}$$

  Dans le triangle PMN rectangle en P, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$MN^2 = PM^2 + PN^2$$
$$MN^2 = 12^2 + 5^2$$
$$MN^2 = 144 + 25$$
$$MN^2 = 169$$

  Or MN est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$MN = \sqrt{169}$$
$$MN = \underline{13 \text{ cm}}$$

$$\boxed{MN = 13 = \frac{13}{10^0} \in \mathbb{D}}$$

- Calcul de IJ.
  - Données : ❏ Les points M, I, N et M, J, P sont alignés sur deux droites sécantes en M ;
    ❏ Les droites (IJ) et (NP) sont parallèles car elles sont parralèles à une même droite (MP) .
  - Le théorème
    Donc d'après le *théorème de Thalès* on a :

$$\frac{MI}{MN} = \frac{MJ}{MP} = \frac{IJ}{NP}$$

    Puis en remplaçant par les valeurs

$$\frac{MI}{MN} = \frac{3}{12} = \frac{IJ}{5}$$

  - Calcul de IJ.
    On a donc

$$\frac{3}{12} = \frac{IJ}{5}$$

    Puis

$$IJ = \frac{3 \times 5}{12} = 1{,}25$$

$$\boxed{IJ = 1{,}25 = \frac{125}{10^2} \in \mathbb{D}}$$

- Conclusion : les longueurs MN et IJ sont bien des décimaux car ils peuvent s'écrire sous forme de fractions décimales, c'est à dire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
  Remarque : $MN = 13$ est aussi un entier naturel.

4. Avec les mêmes carrés, Camille affirme : « Sur la figure 3 ci-dessous, les points R, S et T sont alignés. » L'affirmation de Camille est-elle vraie ou fausse? Justifier la réponse.

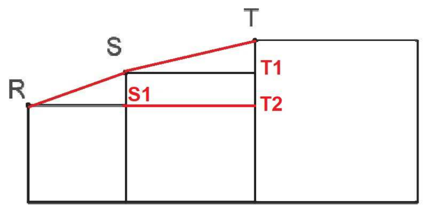


Figure 3

De nombreuses méthodes sont possibles.

- **Méthode 1 : avec Pythagore et l'inégalité triangulaire**.
  On va pour vérifier cette affirmation utiliser l'inégalité triangulaire.

> **Inégalité triangulaire**
> - Si les points R, S et T sont alignés,
>   alors le point S appartient au segment [RT] et donc $RT = RS + ST$.
> - Réciproquement si $RT = RS + ST$ alors le point S appartient au segment [RT].

- Le triangle RSS_1 est rectangle en S_1 et d'après la configuration on a : $RS_1 = 3$ cm et $S_1S = 1cm$.
  Dans le triangle S_1RS rectangle en S_1, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$RS^2 = S_1R^2 + S_1S^2$$
$$RS^2 = 3^2 + 1^2$$
$$RS^2 = 9 + 1$$
$$RS^2 = 10$$

  Or RS est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$RS = \sqrt{10}$$
$$RS \approx \underline{3{,}16 \text{ cm}}$$

- Le triangle STT_1 est rectangle en T_1 et d'après la configuration on a : $ST_1 = 4$ cm et $T_1T = 1cm$.
  Dans le triangle T_1ST rectangle en T_1, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$ST^2 = T_1S^2 + T_1T^2$$
$$ST^2 = 4^2 + 1^2$$
$$ST^2 = 16 + 1$$
$$ST^2 = 17$$

  Or ST est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$ST = \sqrt{17}$$
$$ST \approx \underline{4{,}12 \text{ cm}}$$

- Le triangle RTT_2 est rectangle en T_2 et d'après la configuration on a : $RT_2 = 3 + 4 = 7$ cm et $T_1T_2 = 2cm$.
  Dans le triangle T_2RT rectangle en T_2, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$RT^2 = T_2R^2 + T_2T^2$$
$$RT^2 = 7^2 + 2^2$$
$$RT^2 = 49 + 4$$
$$RT^2 = 53$$

Or RT est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$RT = \sqrt{53}$$
$$RT = \underline{7{,}28 \text{ cm}}$$

– Conclusion :
On a alors arrondi au dix-millième :

$$\begin{cases} RS + ST = \sqrt{10} + \sqrt{17} \approx 7,2854 \\ RT = \sqrt{53} \approx 7,2801 \end{cases}$$

Il n'y a pas égalité, $RS + ST \neq RT$ donc d'après l'inégalité triangulaire, le point S n'appartient pas au segment [ST] et donc les points R, S et T ne sont pas alignés.

- **Méthode 2 : avec la trigonométrie**.

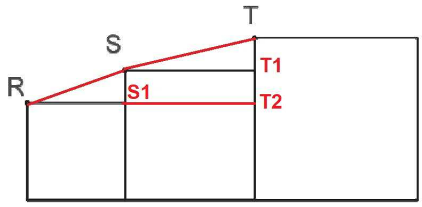


Figure 3

– Dans le triangle RSS_1 rectangle en S_1 on a :

$$\tan \widehat{SRS_1} = \frac{SS_1}{RS_1} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \widehat{SRS_1} \approx 18,4°$$

– Dans le triangle TST_1 rectangle en T_1 on a :

$$\tan \widehat{TST_1} = \frac{TT_1}{ST_1} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \widehat{TST_1} \approx 14°$$

– Dans le triangle TRT_2 rectangle en T_2 on a :

$$\tan \widehat{TRT_2} = \frac{TT_2}{RT_2} = \frac{2}{7} \Longrightarrow \widehat{TRT_2} \approx 15,9°$$

– Conclusion : encore deux façons de conclure.
  * Si les points R, S et T étaient alignés, les droites (RT_2) et (ST_1) étant parallèles, les angles correspondants $\widehat{SRS_1}$ et $\widehat{STT_1}$ devraient être égaux or ils ne le sont pas car leurs tangentes sont différentes.
  * Ou, si les points R, S et T étaient alignés, les angles $\widehat{SRS_1}$ et $\widehat{TRT_2}$ devraient être égaux or ils ne le sont pas car leurs tangentes sont différentes.

- **Méthode 3 : avec Thalès**.
On suppose que les points S, R et T sont alignés. Dans ce cas, puisque les droites (SS_1) et (TT_2) sont parallèles car étant perpendiculaires à une même droite (RT_2) le théorème de Thalès implique que :

$$\frac{RS_1}{RT_2} = \frac{SS_1}{TT_2}$$

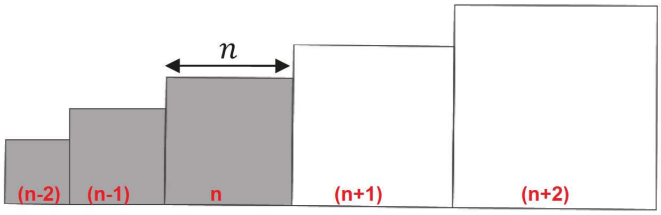
Or on a ici :

$$\frac{RS_1}{RT_2} = \frac{3}{7} \quad \text{et} \quad \frac{SS_1}{TT_2} = \frac{1}{2}$$

les rapports n'étant pas égaux cela implique que les points R, S et T ne sont pas alignés.

©ISSN 2272-5318

B. Situation des cinq carrés



1. **Montrer que résoudre ce problème revient à résoudre l'équation $n^2 - 12n = 0$.**
D'après la figure, si n est la mesure du carré du milieu, alors les cinq carré sont, par ordre croissant, de côtés :

$$(n-2)\ ;\ (n-1)\ ;\ n\ ;\ (n+1)\ ;\ (n+2)\quad ,\text{avec}\quad n > 2,\ \ n \in \mathbb{N}$$

L'objectif de cette partie est de chercher les valeurs de n pour lesquelles la somme des aires des trois carrés gris est égale à la somme des aires des deux carrés blancs. Or on a :

• Somme des aires des carrés gris :

$$A_1 = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2$$
$$A_1 = n^2 - 4n + 4 + n^2 - 2n + 1 + n^2$$
$$A_1 = \underline{3n^2 - 6n + 5}$$

• Somme des aires des carrés blancs :

$$A_2 = (n+1)^2 + (n+2)^2$$
$$A_2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4$$
$$A_2 = \underline{2n^2 + 6n + 5}$$

• Conclusion.
Chercher les valeurs de n (avec n entier, $n > 2$), pour lesquelles la somme des aires des trois carrés gris est égale à la somme des aires des deux carrés blancs c'est donc chercher à résoudre l'équation :

$$A_1 = A_2 \iff 3n^2 - 6n + 5 = 2n^2 + 6n + 5$$
$$A_1 = A_2 \iff \underline{n^2 - 12n = 0}$$

2. **Quelles sont les solutions de l'équation $n^2 - 12n = 0$? Justifier la réponse.**
Pour n entier,

$$\begin{aligned} n^2 - 12n = 0 &\iff n(n-12) = 0 \\ &\iff \left(n = 0\right) \text{ ou } \left(n - 12 = 0\right) \\ &\iff n = 0 \text{ ou } n = 12 \end{aligned}$$

Donc les solutions de cette équation sont $\underline{n = 12 \text{ et } n = 0}$ si n est un entier naturel quelconque.

Remarque : dans le cadre du problème, seule la solution n $= 12$ *est retenue car n est un entier strictement supérieur à 2.*

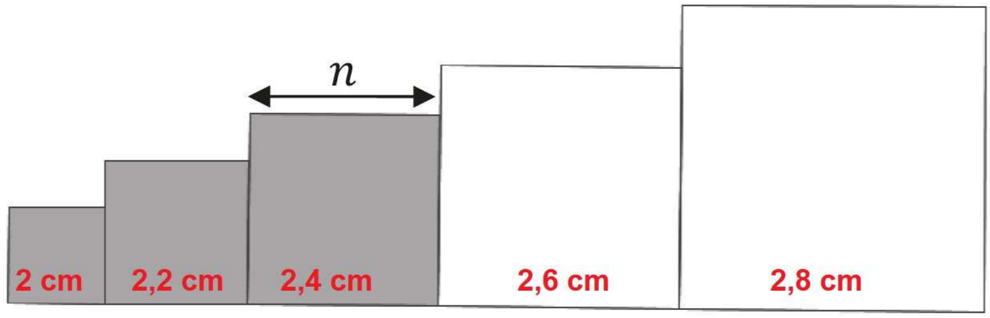
3. **Ces solutions peuvent-elles être retenues pour le problème de la « situation des cinq carrés » ? Justifier votre réponse.**
D'après la configuration, il faut que n soit un entier strictement supérieur à 2 puisque le côté du premier carré est $(n-2)$. Donc seule la solution $\underline{n = 12}$ sera retenue dans le cadre de l'exercice.

4. **Réaliser une figure à l'échelle $\frac{1}{5}$ d'une solution du problème de la « situation des cinq carrés » en détaillant les calculs effectués pour construire la figure.**
Un solution du problème de la « situation des cinq carrés » est constituée de carrés de côtés, pour $n = 12$:

$$(n-2) = 12 - 2 = 10 \text{ cm}\ \ ;\ (n-1) = 11 \text{ cm}\ \ ;\ n = 12 \text{ cm}\ \ ;\ (n+1) = 13 \text{ cm}\ \ ;\ (n+2) = 14 \text{ cm}$$

Une figure à l'échelle $\frac{1}{5}$ d'une solution du problème de la « situation des cinq carrés » est constituée de carrés de côtés :

$$\frac{10}{5} = 2 \text{ cm}\ ;\ \frac{11}{5} = 2{,}2 \text{ cm}\ ;\ \frac{12}{5} = 2{,}4 \text{ cm}\ ;\ \frac{13}{5} = 2{,}6 \text{ cm}\ ;\ \frac{14}{5} = 2{,}8 \text{ cm}\ ;$$



C. Situation des sept carrés

On s'intéresse maintenant à une figure comportant sept carrés. Les mesures, en centimètre, des côtés des sept carrés sont des entiers consécutifs. Les quatre plus petits carrés sont gris et les trois autres sont blancs. On cherche s'il est possible de trouver des longueurs pour les côtés des carrés telles que la somme des aires des quatre carrés gris soit égale à celle des trois carrés blancs. On envisage une résolution graphique. On choisit comme variable x la longueur en cm du côté du plus grand carré blanc. On admet que l'expression algébrique de la somme des aires des carrés gris est alors : $4x^2-36x+86$*, et que l'expression algébrique de la somme des aires des carrés blancs est :* $3x^2-6x+5$*. On nomme :* f *la fonction qui à tout nombre x fait correspondre* $f(x)=4x^2-36x+86$ *;* g *la fonction qui à tout nombre x fait correspondre* $g(x)=3x^2-6x+5$*. La copie d'écran ci-dessous fait apparaître une partie des représentations graphiques de ces deux fonctions, obtenues à l'aide d'un logiciel.*

1. Déterminer graphiquement, si la situation des sept carrés semble avoir des solutions.

- On a choisi comme variable x la longueur en cm du côté du plus grand carré blanc. De ce fait puisqu'il y a 7 carrés, x doit être supérieur ou égal à 7.
- Les éventuelles solutions de la situation des 7 carrés sont les solutions entières, avec $x>7$ de l'équation $f(x)=g(x)$.
- Par ailleurs les abscisses des points d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions de cette équation. Graphiquement, ces courbes semblent se croiser en deux points dont les abscisses sont d'une part entre 2 et 4, d'autre part entre 26 et 28.

- Conclusion : On a donc un seule solution entière possible correspondant au problème qui est $x = 27$.

2. **Vérifier si la ou les solutions trouvées conviennent**.

- Pour $x = 27$ on a :

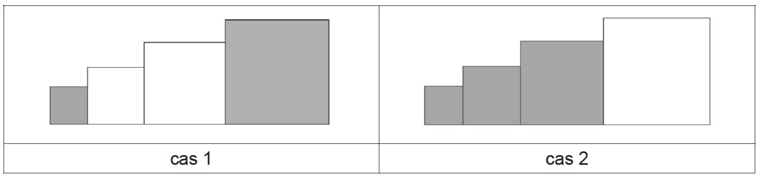
$$\begin{cases} f(27) = 4 \times 27^2 - 36 \times 27 + 86 = 2030 \\ g(27) = 3 \times 27^2 - 6 \times 27 + 5 = 2030 \end{cases}$$

Donc l'entier 27 est bien une solution au problème.

D. Situation des quatre carrés

Avec quatre carrés ayant des côtés de mesures entières et consécutives, on peut envisager au moins deux cas. On cherche à savoir si, dans chacun de ces cas, il est possible que l'aire de la surface grise soit égale à l'aire de la surface blanche..

1. **Quelle feuille correspond à chacun des deux cas ? Justifier la réponse.**



- Dans le cas 1, la partie grisée correspond à celle des carrés 1 et 4 d'aires respectives 1 cm^2 et $4^2 = 16$ cm^2. Elle est donc égale à 17 cm^2 ce qui correspond à la feuille de calcul A.
- Dans le cas 2, la partie grisée correspond à celle des carrés 1, 2 et 3 d'aires respectives 1 cm^2, $2^2 = 4$ cm^2 et $3^2 = 9$ cm^2. Elle est donc égale à 14 cm^2 ce qui correspond à la feuille de calcul B.

2. **Pour la feuille de calcul A :**

2. a. Quelle formule étirable vers le bas a-t-on pu saisir dans la cellule E2 pour calculer l'aire du quatrième carré à partir de la valeur saisie dans la cellule A2 ?

$$\boxed{= (A2+3) \wedge 2} \text{ ou } \boxed{= (A2+3) * (A2+3)}$$

2. b. Quelle formule étirable vers le bas a-t-on pu saisir dans la cellule F2 pour calculer l'aire de la partie grise ?

$$\boxed{= B2 + E2} \text{ ou } \boxed{= somme(B2\ ;\ E2)}$$

3. **Pour chaque cas, quelle conjecture, sur les solutions du problème, la copie d'écran de la feuille de calcul permet-elle d'émettre ? Justifier la réponse.**

- Dans le cas 1, la feuille de calcul A permet d'émettre la conjecture que l'aire de la surface grise diffère de celle de la surface blanche de 4 unités d'aire. Elles ne semblent jamais être égales.
- Dans le cas 2, la feuille de calcul B permet d'émettre la conjecture que l'aire de la surface grise diffère de celle de la surface blanche. Elles ne semblent jamais être égales.

4. **Démontrer que dans les eux cas, la « situation des quatres carrés » n'admet pas de solution.**

- Dans le cas 1, si n désigne le côté du premier carré, avec n entier, $n > 0$ alors :
  - l'aire de la partie blanche est :
  $$(n+1)^2 + (n+2)^2 = 2n^2 + 6n + 5$$
  - l'aire de la partie grise est :
  $$n^2 + (n+3)^2 = 2n^2 + 6n + 9$$
  - La différence des deux aires est bien toujours égale à 4, elles ne sont jamais égales :
  $$2n^2 + 6n + 9 - (2n^2 + 6n + 5) = 4 \neq 0$$
- Dans le cas 2, si n désigne le côté du premier carré, avec n entier, $n > 0$ alors :

– l'aire de la partie blanche est :

$$(n+3)^2 = n^2+6n+9$$

– l'aire de la partie grise est :

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 = 3n^2+6n+5$$

– On cherche n entier tel que :

$$\begin{aligned} n^2+6n+9 = 3n^2+6n+5 &\iff 2n^2-4=0 \\ &\iff n^2-2=0 \\ &\iff n=\sqrt{2}\notin\mathbb{N} \text{ ou } n=-\sqrt{2}\notin\mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc puisque n est entier, il n'y a pas de solution au problème.

Deuxième partie (13 points)

Exercice 1. Vrai ou faux

1. Affirmation 1 : Pour l'ensemble des tablettes produites, la société 1 a le % d'appareils défectueux le plus faible.

Société 1

	Nombre de tablettes fabriquées par jour	Pourcentage moyen de tablettes défectueuses
Electrix	2000	5 %
Tronix	7000	2 %

Société 2

	Nombre de tablettes fabriquées par jour	Pourcentage moyen de tablettes défectueuses
Electrix	6000	3 %
Tronix	1000	2 %

• Société 1.
Le nombre de tablettes défectueuses est :

$$2000\times 5\% + 7000\times 2\% = 240$$

Donc le pourcentage de tablettes défectueuses sur les 9 000 tablettes est :

$$\frac{240}{9000} = \underline{2.67\%}$$

• Société 2.
Le nombre de tablettes défectueuses est :

$$6000\times 3\% + 1000\times 2\% = 200$$

Donc le pourcentage de tablettes défectueuses sur les 7 000 tablettes est :

$$\frac{200}{7000} = \underline{2.86\% > 2.67\%}$$

• Conclusion : l'affirmation 1 est vraie, pour l'ensemble des tablettes produites, la société 1 a le pourcentage d'appareils défectueux le plus faible.

Remarque
On pouvait aussi comprendre la question différemment et calculer les pourcentages par rapport à l'ensemble des $9000+7000 = 16\,000$ tablettes fabriquées par les deux sociétés. Dans ce cas :

• Société 1.
Le nombre de tablettes défectueuses par rapport aux 16 000 tablettes est :

$$\frac{240}{16000} = 1,5\%$$

• Société 2.

Le nombre de tablettes défectueuses par rapport aux 16 000 tablettes est est :

$$\frac{200}{16000} = \underline{1,25\% < 1,5\%}$$

- Conclusion : l'affirmation 1 est fausse, pour l'ensemble des tablettes produites, la société 2 a le pourcentage d'appareils défectueux le plus faible.

2. *On sait que l'aire d'un cube est égale à la somme des aires des faces qui le constituent.*
Affirmation 2 : Le volume d'un cube est proportionnel à son aire.

- Si l'arête du cube vaut 1, son aire vaut 6 (unités d'aire) et son volume 1 (unité de volume).
- Si l'arête du cube vaut 2, son aire vaut $6 \times 4 = 24$ (unités d'aire) et son volume 8 (unités de volume).
- Conclusion : Le volume et l'aire ne sont pas proportionnels puisque

$$\frac{6}{1} \neq \frac{24}{8}$$

L'affirmation 2 est fausse.

3. *Un récupérateur d'eau de pluie contient 0,3 m^3 d'eau. Pour arroser un potager il faut 15 L d'eau par m^2.*
Affirmation 3 : Avec l'eau du récupérateur, on peut arroser quatre fois un potager de 5 m^2.

- Pour arroser un potager il faut 15 L d'eau par m^2 donc pour arroser quatre fois un potager de 5 m^2 il faut :

$$4 \times 5 \times 15 = \underline{300 \text{ litres}}.$$

- Une capacité de 1 litre est égale à un volume de 1 dm^3 et donc une capacité de 1 000 litres correspond à un volume de 1 m^3. Un récupérateur de 0,3 m^3 contient donc en litres :

$$0,3 \text{ m}^3 = 0,3 \times 1000 = \underline{300 \text{ litres}}$$

- Conclusion : l'affirmation 3 est donc vraie.

4. $A = 7 + \frac{2}{10}$
Affirmation 4 : La partie décimale de A^2 est $\frac{4}{100}$.

$$\begin{aligned} A^2 = \left(7 + \frac{2}{10}\right)^2 &= 49 + 2 \times 7 \times \frac{2}{10} + \frac{4}{100} \\ &= 49 + \frac{28}{10} + \frac{4}{100} \\ &= 49 + \frac{280}{100} + \frac{4}{100} \\ &= 49 + \frac{284}{100} \\ &= 49 + \frac{200}{100} + \frac{84}{100} \\ &= 51 + \frac{84}{100} = \underline{51,84} \end{aligned}$$

Donc l'affirmation 4 est fausse, la partie décimale de A^2 est $\frac{84}{100}$.

Exercice 2.

1. *Inès a lancé 200 fois un dé équilibré à 6 faces et a collecté ses résultats dans un tableau :*

Nombre affiché sur la face	1	2	3	4	5	6
nombre d'apparitions	30	41	32	28	31	

1. a. Combien de fois a-t-elle obtenu 6 ?

$$200-30-41-32-28-31=38$$

Elle a obtenu le six <u>38 fois</u>.

1. b. Quelle est, en pourcentage, la fréquence d'apparition du « 1 » ?

Le « 1 » est apparu 30 fis sur 200 donc la fréquence d'apparition du « 1 » est :

$$\boxed{f=\frac{30}{200}=15\%}$$

2. *Inès lance cette fois deux dés équilibrés à 6 faces.*

2. a. Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à 9 ?

L'univers associé à cette expérience aléatoire est composé de 36 couples composés des 2 tirages de dés.

Obtenir deux nombres dont le produit est égal à 9 c'est obtenir un double 3 donc en supposant l'équiprobabilité des tirages, la probabilité associée est :

$$\boxed{p_1=\frac{1}{36}\approx 0,028}$$

2. b. Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à 12 ?

Obtenir deux nombres dont le produit est égal à 12 correspond à l'évènement :

$$A=\Big\{(6\ ;\ 2)\ ;\ (2\ ;\ 6)\ ;\ (3\ ;\ 4)\ ;\ (4\ ;\ 3)\Big\}$$

Donc en supposant l'équiprobabilité des tirages, la probabilité associée est :

$$\boxed{p_2=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}\approx 0,11}$$

Remarque

On pouvait utiliser un tableau à donnant les 36 produits :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	12	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

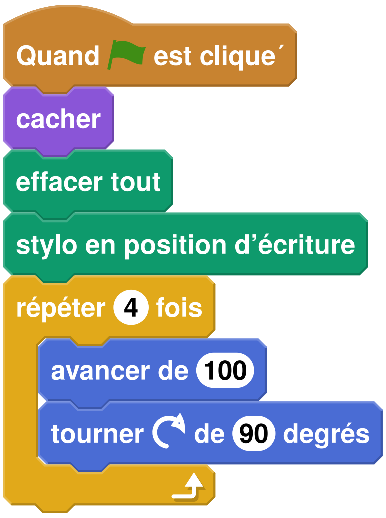
Exercice 3.

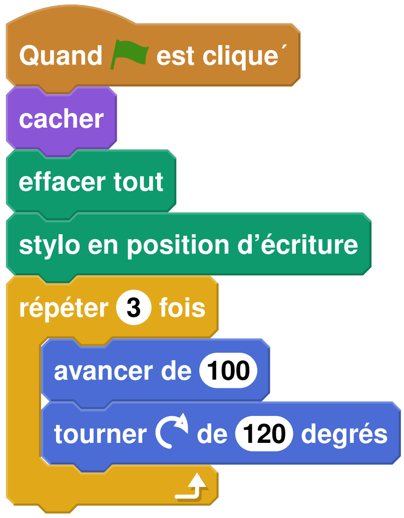
Polygone régulier

Un **polygone régulier** est un polygone convexe dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont la même mesure.

Au cours de cet exercice, on pourra utiliser le résultat admis suivant :
« La somme des mesures en degré des angles d'un polygone régulier à n côtés vaut $(n \times 180° - 360°)$. »

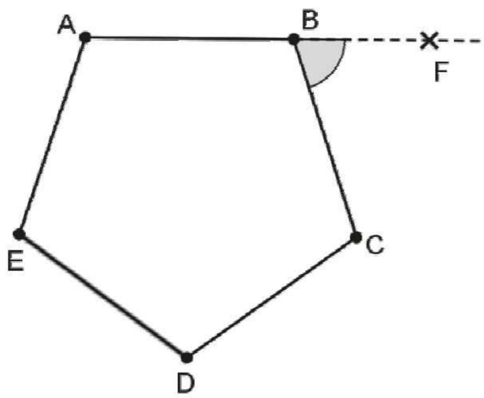
1. **Déterminer, sans justifier, la nature des deux figures programme A et le programme B.**





Le programme A va donner un carré de côté 100 et programme B va donner un triangle équilatéral de côté 100.

2. **On considère le pentagone régulier ABCDE ci-dessous. F est un point de la droite (AB) n'appartenant pas à la demi-droite [BA).**



2. a. Démontrer que $\widehat{FBC} = 72°$.
La somme des mesures en degré des angles du pentagone régulier ABCDE (à $n = 5$ côtés) vaut

$$n \times 180° - 360° = 5 \times 180° - 360° = 540°$$

De ce fait, les 5 angles du pentagone régulier étant de même mesure :

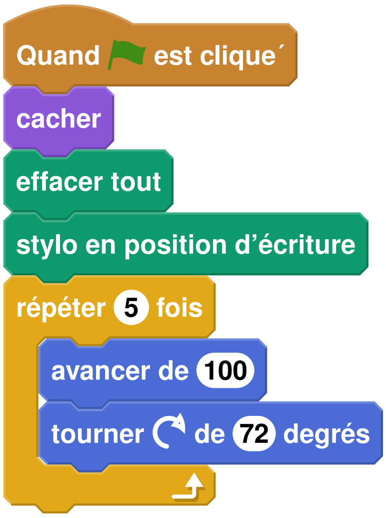
$$\widehat{ABC} = \frac{540}{5} = 108°$$

Par ailleurs l'angle $\widehat{ABF}$ étant plat on a :

$$\boxed{\widehat{FBC} = 180° - 108° = 72°}$$

©ISSN 2272-5318

2. b. En déduire les modifications à apporter au programme A pour que la figure tracée soit un pentagone régulier.



Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout polygone régulier, l'angle $\widehat{FBC}$ est égal à 360 divisé par le nombre de côtés de ce polygone.

3. **On souhaite maintenant réaliser un programme qui, lorsqu'on l'exécute, permet d'obtenir le tracé d'un polygone régulier dont le nombre de côtés est choisi par l'utilisateur. Voici les programmes élaborés par quatre élèves. Lequel de ces quatre programmes permet de réaliser le tracé souhaité ? Préciser pourquoi les autres ne conviennent pas.**

   - C'est le programme 2 qui convient. Le nombre de côtés est stocké dans la variable réponse, la boucle va se répéter autant de fois que le nombre entré. Par ailleurs l'angle est bien égale à 360/réponse.
   - Dans le programme 1, la boucle est répétée 10 fois ce qui conduira au tracé de 10 segments.
   - Dans les programme 3 et 4 c'est l'angle qui est incorrect.

4. **Le programme Scratch ne permet pas de tracer facilement un cercle. Comment peut-on utiliser le travail mené dans cet exercice pour construire, avec Scratch, une figure ayant l'apparence d'un cercle à l'écran ?**
   Il suffit de prendre un nombre important de côtés, de faire tendre le nombre de côtés vers l'infini. Le polygone inscrit va alors se "rapprocher" du cercle qui le contient.

   Remarque : c'est ainsi que le célèbre Archimède (287-212 av. J.C.) parvint à donner des approximations du nombre π. Archimède établit un encadrement du périmètre du cercle à l'aide des périmètres des polygones réguliers inscrit et circonscrit au cercle et possédant 96 côtés.

Troisième partie (14 points) : éléments de correction

Situation 1

1. **Quel usage du nombre est mobilisé dans cette situation?**
   Usage cardinal du nombre (le nombre exprime une quantité).

2. **Quel est l'intérêt du quai?**

   - Le quai permet une auto-validation.
   - Le quai invite à comparer le nombre de places vides et les jetons sans être dans une correspondance terme à terme.

3. **Au regard des acquis liés à la notion du nombre, analyser les procédures mises en œuvre par chacun des élèves.**

   - Tous les élèves ont rempli le contrat.
   - **L'élève A** prend un poignée grossière de jetons, les distribue dans les places vides et ramène ce qui reste. Il semble procéder par estimation globale et cela sans dénombrer.
   - **L'élève B** a compris le principe cardinal. Il a gardé la quantité en mémoire.
   - **L'élève C** prend les jetons un a un. Il semble procéder par correspondance terme à terme.
   - **L'élève D** a décomposé les places vides par colonnes, une de 3 et une de 4. On ne sait pas si il sait dénombrer jusqu'à 7.

4. **Proposer deux modifications de la tâche, que l'enseignant peut proposer pour amener les élèves A ou C à progresser dans leur utilisation du nombre?**
   Il faut forcer l'élève à dénombrer exactement. Il peut :

   - demander à ne faire qu'un voyage;
   - modifier la disposition des places, faire 3 colonnes par exemple pour éviter l'utilisation des deux mains;
   - proposer des outils de mémorisation (ardoises, ...);
   - réduire le nombre de places vides;
   - mettre en place un médiateur.

Situation 2

1. **Pour chaque calcul, analyser les productions des élèves au regard des connaissances mobilisées sur les nombres et sur les propriétés des opérations.**
   Toutes les productions sont réussies.

   - **Production 1** : l'élève utilise la propriété de conservation des écarts pour la soustraction. Il maitrise la numération de position (unités de numération).
   - **Production 2** : l'élève écrit les deux nombres dans la même unité de numération (en centièmes). Il utilise la propriété de conservation des écarts pour la soustraction (sur les entiers de centièmes). Il maitrise la numération de position.
   - **Production 3** : l'élève décompose 15 en 10 + 5 puis utilise la distributivité. Il maitrise la numération de position.
   - **Production 4** : il travaille sur les nombres de centièmes, il utilise la distributivité. Il maitrise la numération de position.

2. **Pour chaque calcul, préciser ce qui distingue les productions des deux élèves.**

   - Calcul 1 : la représentation du nombre induit la procédure de calcul.
   - Calcul 2 : les élèves s'appuient sur des désignations orales ou écrites traduites de façons différentes d'après l'énoncé. Les deux élèves utilisent la distributivité différemment.

Situation 3

1. **Quelle est la notion du programme que ces exercices permettent principalement de travailler ?**
   La proportionnalité.

2. **Analyser les productions des élèves A, B, C et D en indiquant le type de procédures utilisées.**

   - **A et B** : propriété de linéarité pour l'addition. Les nombres de l'énoncé induisent ce procédé.
   - **B** : représentation imagée de la situation. Des égalités erronées sont présentes "(15 p = 10 œufs)".
   - **C** : linéarité pour la multiplication par un nombre puis pour l'addition.
   - **D** : retour à l'unité.

3. **Montrer en quoi les différences entre les énoncés permettent une progressivité dans l'apprentissage de la notion.**

   - Les 3 énoncés sont construits pour que l'élève repère des relations entre les nombres, consolide les procédures, ait le besoin de mobiliser de nouvelles procédures.
   - l'enseignant modifie les variables didactiques : valeurs et relations entres nombres.
   - Dans l'ex. 1 le nombre de personnes induit la méthode : $24 = 15 + 9$.
   - Dans l'ex. 2 les nombres ont un diviseur commun.
   - Dans l'ex. 3 les nombres n'ont pas un diviseur commun pour induire le passage à l'unité. Relation simple entre le nb d'œufs et de personnes.

4. **Proposer un exercice qui permettrait, en deuxième moitié de cycle 3, de poursuivre l'apprentissage de la notion travaillée.**
   Proposer une situation où les nombres n'ont pas de relations simples.

   Par exemple : « *Il faut 15 œufs pour faire un gâteau pour 21 personnes. Pour combien de personnes puis-je faire un gâteau avec 12 œufs ou 3 œufs ou 36 œufs* »

Fin du devoir

©ISSN 2272-5318