

COURS

Théorème de Thalès

Configurations, réciproque, contraposée, droite des milieux et rappel de Pythagore

Version professeur

Sommaire du chapitre

I	Thalès Direct : pour calculer des distances	2
II	Réciproque et contraposée de Thalès : tester le parallélisme	3
III	Le théorème des milieux	4
IV	Complément : rappels sur le théorème de Pythagore	5



Objectifs du chapitre

À la fin de ce chapitre, on doit savoir :

- identifier les configurations du théorème de Thalès (triangle et papillon) ;
- appliquer le théorème de Thalès pour calculer une longueur ;
- utiliser sa réciproque pour démontrer que deux droites sont parallèles ;
- utiliser sa contraposée pour démontrer que deux droites ne sont pas parallèles ;
- appliquer les propriétés de la droite des milieux dans un triangle ;
- rédiger un raisonnement en distinguant données, égalités et calculs ;
- réinvestir le théorème de Pythagore, sa réciproque et sa contraposée.

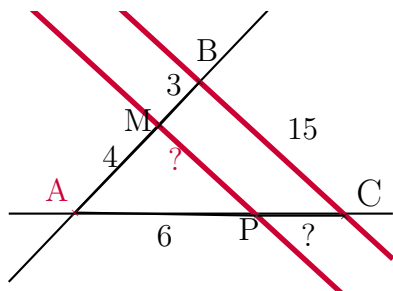
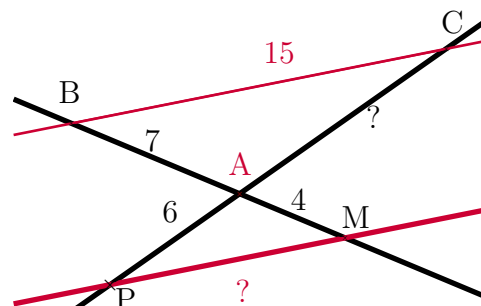
I Thalès Direct : pour calculer des distances

Théorème 1 (Théorème de Thalès (*intercept theorem*))

- Si $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ Les points A, M, B et A, P, C sont alignés} \\ \text{sur deux droites sécantes en A;} \\ \square \text{ Les droites (BC) et (MP) sont } \underline{\text{parallèles}}. \end{array} \right.$

Alors

$$\frac{\boxed{A}M}{\boxed{A}B} = \frac{\boxed{A}P}{\boxed{A}C} = \frac{MP}{BC}$$



Exemple 1 (Application directe du théorème de Thalès)

Calculons MP et AC.

Données

- $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ Les points A, M, B et A, P, C sont alignés sur deux droites sécantes en A;} \\ \square \text{ Les droites (BC) et (MP) sont } \underline{\text{parallèles}}. \end{array} \right.$

Le théorème

Donc d'après le *théorème de Thalès* on a :

$$\frac{\boxed{A}M}{\boxed{A}B} = \frac{\boxed{A}P}{\boxed{A}C} = \frac{MP}{BC}$$

Puis en remplaçant par les valeurs

$$\frac{4}{7} = \frac{6}{AC} = \frac{MP}{15}$$

On a donc 3 égalités utilisables, deux vont suffire

Pour calculer MP

$$\begin{aligned} \frac{4}{7} &= \frac{MP}{15} \\ \text{puis par produit en croix} \\ MP &= \frac{4 \times 15}{7} \end{aligned}$$

$$MP = \frac{60}{7} \approx 8,6 \text{ cm à } 0,1 \text{ cm près}$$

Pour calculer AC

$$\begin{aligned} \frac{4}{7} &= \frac{6}{AC} \\ \text{puis par produit en croix} \\ AC &= \frac{7 \times 6}{4} \end{aligned}$$

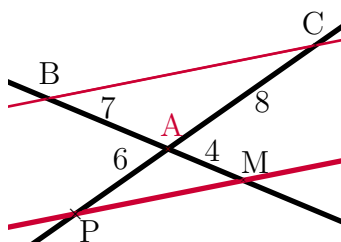
$$AC = \frac{42}{4} = 10,5 \text{ cm}$$

II Réciproque et contraposée de Thalès : tester le parallélisme

Théorème 2 (Contraposée (*contrapositive*) du théorème de Thalès)

Si $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ Les points A, M, B et A, P, C sont alignés sur deux droites sécantes en A;} \\ \square \frac{\boxed{A}M}{\boxed{A}B} \neq \frac{\boxed{A}P}{\boxed{A}C} \end{array} \right.$

Alors Les droites (BC) et (MP) ne sont pas parallèles.



Exemple 2 (Rédaction type)

Exemple 2 : Les droites (MP) et (BC) sont-elles parallèles ?

- **Le test, avec mise au même dénominateur.**

D'une part :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{7} = \frac{16}{28}$$

D'autre part :

$$\frac{AP}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{21}{28}$$

- **Données.**

- Les points A, M, B et A, P, C sont alignés sur deux droites sécantes en A ;
- On n'a pas égalité des rapports : $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AP}{AC}$.

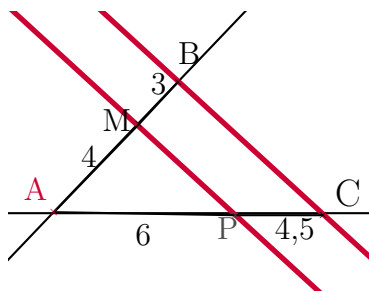
- **Conclusion.**

De ce fait, d'après la *contraposée du théorème de Thalès*, Les droites (BC) et (MP) ne sont pas parallèles.

Théorème 3 (Réciproque (*converse*) du théorème de Thalès)

Si $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ Les points A, M, B et A, P, C sont alignés dans cet ordre sur deux droites sécantes en A;} \\ \square \frac{\boxed{A}M}{\boxed{A}B} = \frac{\boxed{A}P}{\boxed{A}C} \end{array} \right.$

Alors Les droites (BC) et (MP) sont parallèles.



Exemple 3 (Rédaction type)

Exemple 3 : Les droites (MP) et (BC) sont-elles parallèles ?

- **Le test, avec mise au même dénominateur.**

D'une part :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{7} = \frac{12}{21}$$

D'autre part :

$$\frac{AP}{AC} = \frac{6}{10,5} = \frac{12}{21}$$

- **Données.**

- Les points A, M, B et A, P, C sont alignés dans cet ordre ;
- On a égalité des rapports : $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC}$.

- **Conclusion.**

De ce fait, d'après la *réciproque du théorème de Thalès*, Les droites (BC) et (MP) sont parallèles.

III Le théorème des milieux

Le **théorème des milieux** est un cas particulier du théorème de Thalès joint à sa réciproque.

(*midpoint theorem; particular case of the intercept theorem*)

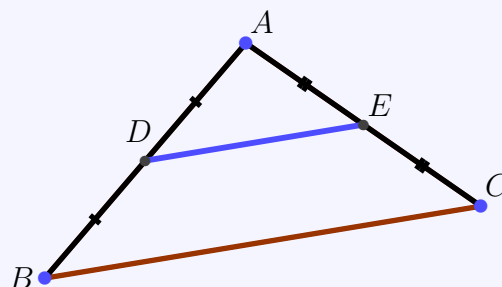
Théorème 4 (Théorème des milieux)

Soit ABC un triangle.

- Si D est le milieu du segment [AB]
et
- E le milieu du segment [AC]

Alors

1. $(DE) \parallel (BC)$
et
2. $DE = \frac{1}{2}BC$ ou $BC = 2DE$



Théorème 5 (Réciproque du théorème des milieux)

Si une droite passe par le milieu d'un des côtés d'un triangle et si elle est parallèle à un autre côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

IV Complément : rappels sur le théorème de Pythagore

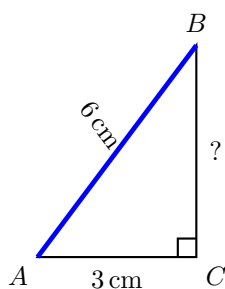
(Pythagorean theorem, converse and contrapositive)

Théorème 6 (Théorème de Pythagore)

Si un triangle ABC est rectangle en C , alors $[AB]$ est son hypoténuse et

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Exemple 1 : calculer une longueur dans un triangle rectangle.



Exemple 4 (Rédaction type : Pythagore)

1. **Les données.** Le triangle ABC est rectangle en C ; son hypoténuse est $[AB]$.
2. **Les égalités.** D'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

3. **Les calculs.**

$$6^2 = 3^2 + BC^2$$

$$BC^2 = 36 - 9 = 27.$$

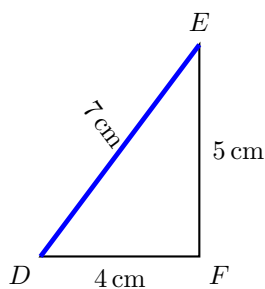
Puisque BC est une longueur positive :

$$BC = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ cm} \approx 5,2 \text{ cm}.$$

Théorème 7 (Contraposée du théorème de Pythagore)

Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté est **différent** de la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle **n'est pas rectangle**.

Exemple 2 : le triangle DEF est-il rectangle ?



Exemple 5 (Rédaction type : contraposée)

1. **Les données.** Dans DEF , le plus grand côté est $[DE]$ (7 cm).
2. **Les égalités à vérifier.** Calculons séparément :

D'une part :

$$DE^2 = 7^2 = 49.$$

D'autre part :

$$DF^2 + FE^2 = 4^2 + 5^2 = 41.$$

3. **Conclusion.**

Puisque

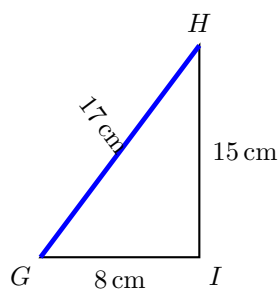
$$DE^2 \neq DF^2 + FE^2$$

D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle DEF n'est pas rectangle.

Théorème 8 (Réciproque du théorème de Pythagore)

Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté est **égal** à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est **rectangle au sommet opposé au plus grand côté**.

Exemple 3 : le triangle GHI est-il rectangle ?

**Exemple 6** (Rédaction type : réciproque)

1. Les données. Dans GHI , le plus grand côté est $[GH]$ (17 cm).

2. Les égalités à vérifier. Calculons séparément :

D'une part :

$$GH^2 = 17^2 = 289.$$

D'autre part :

$$GI^2 + IH^2 = 8^2 + 15^2 = 289.$$

3. Conclusion.

Puisque

$$GH^2 = GI^2 + IH^2$$

d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle GHI est rectangle en I .

↩ **Fin du cours** ↪