

TD – EXERCICES

Arithmétique

Divisibilité, nombres premiers et fractions irréductibles

Version sujet – Version imprimable

Sommaire du TD

I	Division euclidienne	2
II	Multiples, diviseurs et nombres premiers	3
III	Calcul littéral et arithmétique	4
IV	Décomposition en facteurs premiers et diviseurs	5
V	Fractions irréductibles	6
VI	Partages et périodicité	7
VII	Exercices du Brevet	8
VIII	Défis de concours	9

Objectifs du TD

- Effectuer et interpréter une division euclidienne.
- Utiliser les notions de multiple, de diviseur et les critères de divisibilité.
- Reconnaître un nombre premier et décomposer un entier en facteurs premiers.
- Calculer avec des fractions, rendre une fraction irréductible et déterminer les diviseurs d'un entier.
- Utiliser le calcul littéral pour démontrer des propriétés arithmétiques.
- Résoudre des problèmes de partage ou de périodicité et rédiger une justification.

Thème I

Division euclidienne

Exercice 1 Effectuer et interpréter une division euclidienne

Pour chacune des divisions suivantes, donner le quotient et le reste, puis écrire l'égalité correspondante :

$$725 \div 18, \quad 2\,035 \div 24, \quad 10\,000 \div 137.$$

Exercice 2 Un voyage scolaire

Source : Exercice adapté d'un ancien sujet de Brevet.

Pour un voyage, 154 élèves et 13 adultes doivent prendre des bus de 24 places. Tous les passagers doivent être assis.

1. Combien de personnes participent au voyage ?
2. Effectuer la division euclidienne utile.
3. Combien de bus faut-il réserver ? Justifier l'arrondi effectué.

Exercice 3 [!] Bilan : division et interprétation

Une association dispose de 1 247 livres. Elle range au maximum 32 livres par carton.

1. Effectuer la division euclidienne de 1 247 par 32.
2. Interpréter le quotient et le reste dans cette situation.
3. Combien de cartons sont nécessaires pour ranger tous les livres ?

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 4, page 2.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 5, page 2.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 4 [+] Consolidation : même méthode

Un collège doit ranger 1 385 manuels dans des caisses contenant au maximum 36 manuels.

1. Effectuer la division euclidienne de 1 385 par 36.
2. Interpréter le quotient et le reste dans cette situation.
3. Combien de caisses sont nécessaires pour ranger tous les manuels ?

Exercice 5 [*] Approfondissement : retrouver le dividende

Dans la division euclidienne d'un entier N par 17, le quotient est le double du reste. De plus, le reste est strictement supérieur à 5 et $N < 250$. Déterminer toutes les valeurs possibles de N .

Thème II

Multiples, diviseurs et nombres premiers

Exercice 6 Critères de divisibilité

Sans effectuer de division, étudier la divisibilité de chacun des nombres 7236, 4515 et 8070 par 2, 3, 5, 9 et 10. Chaque réponse doit être justifiée.

Exercice 7 Reconnaître un nombre premier

Parmi 51, 67, 87, 91 et 97, déterminer les nombres premiers. Pour chaque nombre non premier, donner une décomposition en produit de deux entiers strictement supérieurs à 1.

Exercice 8 [!] Bilan : vrai ou faux

Source : D'après plusieurs exercices du DNB, sessions antérieures à 2017.

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse en justifiant soigneusement.

1. Les diviseurs communs à 12 et 18 sont exactement les diviseurs de 6.
2. Tout nombre premier est impair.
3. Tout nombre impair est premier.
4. Si un entier est divisible par 6, alors il est divisible par 2 et par 3.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 9, page 3.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 10, page 3.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 9 [+] Consolidation : vrai ou faux

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse en justifiant soigneusement.

1. Les diviseurs communs à 20 et 30 sont exactement les diviseurs de 10.
2. Tout nombre pair est composé.
3. Tout nombre premier supérieur à 2 est impair.
4. Si un entier est divisible par 15, alors il est divisible par 3 et par 5.

Exercice 10 [*] Approfondissement : un entier à cinq chiffres

Source : Question 1 d'après le sujet de référence de mathématiques n° 2 du DNB, septembre 2026, partie 1, question 4.

1. Donner un entier à cinq chiffres divisible par 9 et se terminant par 7.
2. Déterminer tous les chiffres que l'on peut placer dans la case de $52\square7$ pour obtenir un multiple de 9.
3. Parmi les nombres obtenus, lesquels sont aussi divisibles par 3 mais ne sont divisibles ni par 2 ni par 5 ?

Thème III

Calcul littéral et arithmétique

Exercice 11 Vrai ou faux : pair ou impair ?

Pour chaque affirmation portant sur des entiers naturels, dire si elle est vraie ou fausse. La réponse doit être démontrée en utilisant les écritures

$$2k \quad \text{et} \quad 2k + 1,$$

où k désigne un entier naturel.

1. La somme de deux entiers pairs est paire.
2. La somme de deux entiers impairs est impaire.
3. La somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire.
4. Le carré d'un entier impair est impair.
5. Le produit de deux entiers consécutifs est impair.

Exercice 12 [!] **Bilan** : un programme donnant un multiple de 10

Source : D'après le DNB Pondichéry, avril 2014.

On considère le programme suivant :

Programme de calcul

- Étape 1** Choisir un entier.
Étape 2 Lui ajouter 3.
Étape 3 Multiplier le résultat par 7.
Étape 4 Ajouter le triple du nombre choisi au départ.
Étape 5 Retrancher 21.

1. Appliquer ce programme à l'entier 4.
2. On note n l'entier choisi au départ. Écrire le résultat du programme en fonction de n .
3. Développer et réduire cette expression.
4. Démontrer que le résultat obtenu est toujours un multiple de 10.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 13, page 4.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 14, page 5.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 13 [+] **Consolidation** : un programme donnant un multiple de 3

Source : Exercice repris de l'ancien TD d'arithmétique Math93.

On considère le programme suivant :

Programme de calcul

- Étape 1** Choisir un entier.
Étape 2 Lui ajouter 3.
Étape 3 Multiplier le résultat par 5.
Étape 4 Retrancher le double du nombre choisi au départ.

1. Appliquer ce programme à l'entier 7.

- On note n l'entier choisi au départ. Écrire le résultat du programme en fonction de n .
- Développer et réduire cette expression.
- Démontrer que le résultat obtenu est toujours un multiple de 3.

Exercice 14 [*] Approfondissement : trois entiers consécutifs

On choisit trois entiers consécutifs n , $n + 1$ et $n + 2$.

- Expliquer pourquoi l'un au moins de ces trois entiers est pair.
- Expliquer pourquoi l'un de ces trois entiers est divisible par 3.
- En déduire que le produit $n(n + 1)(n + 2)$ est toujours un multiple de 6.
- Vérifier cette propriété avec trois entiers consécutifs de votre choix.

Thème IV

Décomposition en facteurs premiers et diviseurs

Exercice 15 Décomposer un entier

Décomposer en produit de facteurs premiers :

180, 756, 1 014, 1 260.

Exercice 16 Lister tous les diviseurs

- Décomposer 360 en produit de facteurs premiers.
- En déduire la liste de tous ses diviseurs positifs.
- Combien 360 possède-t-il de diviseurs positifs ?

Exercice 17 [!] Bilan : décomposition et diviseurs

On considère l'entier $N = 540$.

- Décomposer N en produit de facteurs premiers.
- Expliquer pourquoi 45 est un diviseur de N .
- Déterminer tous les diviseurs de N compris entre 20 et 50.
- Déterminer le nombre total de diviseurs positifs de N .

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 18, page 5.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 19, page 6.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 18 [+] Consolidation : même méthode

On considère l'entier $M = 600$.

- Décomposer M en produit de facteurs premiers.
- Expliquer pourquoi 40 est un diviseur de M .
- Déterminer tous les diviseurs de M compris entre 20 et 50.
- Déterminer le nombre total de diviseurs positifs de M .

Exercice 19 [*] **Approfondissement : exactement quinze diviseurs**

Trouver le plus petit entier naturel qui possède exactement 15 diviseurs positifs. Justifier qu'il est bien le plus petit.

Thème V**Fractions irréductibles****Exercice 20** **Révisions : calculer avec des fractions**

Source : Le calcul E est adapté du DNB Amérique du Nord, juin 2014.

Effectuer les calculs suivants et donner chaque résultat sous forme irréductible :

$$A = \frac{3}{4} + \frac{5}{6}, \quad B = \frac{7}{10} - \frac{3}{4}, \quad C = \frac{14}{15} \times \frac{25}{21},$$

$$D = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) \div \frac{7}{9}, \quad E = \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{7}\right) \div \frac{1}{5}.$$

Exercice 21 **Simplifier à l'aide des facteurs premiers**

Rendre irréductibles les fractions suivantes en détaillant les décompositions :

$$\frac{180}{252}, \quad \frac{756}{441}, \quad \frac{1\,014}{1\,260}.$$

Exercice 22 **Une identité remarquable avec une fraction**

On considère l'expression

$$F(x) = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2.$$

1. Développer et réduire $F(x)$ en utilisant une identité remarquable.
2. Calculer $F\left(\frac{7}{4}\right)$ à partir de la forme initiale.
3. Vérifier le résultat précédent à l'aide de la forme développée.

Exercice 23 [!] **Bilan : décomposer puis simplifier**

On considère la fraction $F = \frac{1\,386}{1\,980}$.

1. Décomposer le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers.
2. Rendre F irréductible en faisant apparaître les facteurs simplifiés.
3. Justifier que la fraction obtenue est irréductible.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 24, page 6.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 25, page 7.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 24 [+] **Consolidation : même méthode**

On considère la fraction $G = \frac{1\,575}{2\,310}$.

1. Décomposer le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers.

- Rendre G irréductible en faisant apparaître les facteurs simplifiés.
- Justifier que la fraction obtenue est irréductible.

Exercice 25 [*] Approfondissement : une fraction avec une inconnue

Déterminer le plus petit entier naturel non nul n pour lequel la fraction

$$\frac{84}{n}$$

est égale à une fraction irréductible de dénominateur 15.

Thème VI

Partages et périodicité

Exercice 26 Former le plus grand nombre de groupes

Source : Sujet zéro officiel de mathématiques du DNB, série générale, sujet B, partie 2, exercice 4.

Dans un collège, 91 filles et 77 garçons participent à un club sciences. On souhaite former des groupes identiques : chaque groupe doit avoir le même nombre de filles et le même nombre de garçons.

- Décomposer 91 et 77 en produits de facteurs premiers.
- En déduire le nombre maximal de groupes que l'on peut former. Justifier.
- Dans ce cas, combien d'élèves y aura-t-il dans chaque groupe ?

Exercice 27 Deux voitures sur un circuit

Source : Exercice adapté d'un ancien sujet de Brevet.

Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ. La voiture A effectue un tour en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

- Après combien de temps repasseront-elles ensemble pour la première fois sur la ligne de départ ?
- Elles roulent pendant 6 heures. Donner tous les instants, autres que le départ, où elles repassent ensemble sur cette ligne.

Exercice 28 [!] Bilan : une mosaïque

Source : D'après le DNB Amérique du Sud, novembre 2016.

Une surface rectangulaire de 108 cm sur 225 cm doit être recouverte sans découpe par des carreaux carrés identiques.

- Des carreaux de 3 cm conviennent-ils ? Des carreaux de 6 cm ? Justifier.
- Décomposer 108 et 225 en produits de facteurs premiers.
- Déterminer la plus grande longueur possible pour le côté d'un carreau.
- Combien de carreaux seront alors nécessaires ?

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 29, page 7.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 30, page 8.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 29 [+] Consolidation : même problème

Une surface rectangulaire de 168 cm sur 252 cm doit être recouverte sans découpe par des carreaux carrés identiques.

- Des carreaux de 6 cm conviennent-ils ? Des carreaux de 10 cm ? Justifier.
- Décomposer 168 et 252 en produits de facteurs premiers.

3. Déterminer la plus grande longueur possible pour le côté d'un carreau.
4. Combien de carreaux seront alors nécessaires ?

Exercice 30 [*] Approfondissement : carreaux sur le pourtour

Source : Annale zéro officielle du DNB à compter de la session 2017, exercice 6.

Un panneau de 240 cm sur 360 cm est recouvert de carreaux carrés identiques, posés sans découpe ni jointure.

1. Quelles sont toutes les longueurs entières possibles du côté des carreaux comprises entre 10 cm et 20 cm ?
2. On choisit des carreaux de 15 cm. Une rangée de carreaux bleus est posée sur tout le pourtour et les autres carreaux sont blancs. Combien de carreaux bleus utilise-t-on ?

Thème VII

Exercices du Brevet

Exercice 31 [FLASH] Automatismes : divisibilité et fractions

Source : Question 1 issue du sujet de référence de mathématiques n° 2 du DNB, septembre 2026 ; autres questions dans l'esprit de la liste officielle d'automatismes.

Répondre sans calculatrice.

1. Donner un entier à cinq chiffres divisible par 9 et se terminant par 7.
2. Rendre la fraction $\frac{18}{24}$ irréductible.
3. Donner tous les diviseurs positifs de 24.
4. Le nombre 2025 est-il divisible par 3 ? par 9 ?

Exercice 32 [DNB] Objectif Brevet : diviseurs et probabilité

Source : Sujet zéro officiel de mathématiques du DNB, série générale, sujet B, partie 2, exercice 2.

Une urne contient 21 jetons numérotés de 1 à 21, indiscernables au toucher. On tire un jeton au hasard.

1. On note A l'événement « obtenir 2, 3 ou 10 ». Calculer $P(A)$ sous forme irréductible.
2. On note B l'événement « obtenir un jeton dont le numéro est un diviseur de 24 ».
 2. a. Donner les issues de l'événement B .
 2. b. Déterminer $P(B)$ sous forme irréductible.

Exercice 33 [DNB] Objectif Brevet : des ballotins de dragées

Source : DNB Pondichéry, avril 2014.

Emma et Arthur disposent de 3003 dragées au chocolat et de 3731 dragées aux amandes.

1. Ils répartissent d'abord les dragées de façon identique dans 20 corbeilles. Combien reste-t-il de dragées de chaque sorte ?
2. Ils souhaitent maintenant préparer des ballotins de composition identique en utilisant toutes les dragées.
 2. a. Peuvent-ils préparer 90 ballotins ? Justifier.
 2. b. Quel est le nombre maximal de ballotins ?
 2. c. Quelle sera alors la composition de chaque ballotin ?

Exercice 34 [!] Bilan : bilan du chapitre

Une association possède 420 bouteilles d'eau et 588 barres de céréales. Elle veut préparer le plus grand nombre possible de lots identiques en utilisant tout le stock.

1. Décomposer 420 et 588 en produits de facteurs premiers.

2. Déterminer le nombre maximal de lots. Justifier.
3. Donner la composition de chaque lot.
4. L'association range ensuite les lots dans des cartons pouvant contenir au maximum 16 lots. Combien de cartons faut-il prévoir ? Écrire la division euclidienne utilisée.
5. La fraction $\frac{420}{588}$ est-elle irréductible ? Sinon, la rendre irréductible.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 35, page 9.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 36, page 9.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 35 [+] Consolidation : même bilan

Une association possède 630 jus de fruits et 882 biscuits. Elle veut préparer le plus grand nombre possible de lots identiques en utilisant tout le stock.

1. Décomposer 630 et 882 en produits de facteurs premiers.
2. Déterminer le nombre maximal de lots. Justifier.
3. Donner la composition de chaque lot.
4. L'association range ensuite les lots dans des cartons pouvant contenir au maximum 20 lots. Combien de cartons faut-il prévoir ? Écrire la division euclidienne utilisée.
5. La fraction $\frac{630}{882}$ est-elle irréductible ? Sinon, la rendre irréductible.

Exercice 36 [*] Approfondissement : trois contraintes

On cherche le plus petit entier naturel N strictement supérieur à 100 tel que :

- la division de N par 6 laisse un reste égal à 1 ;
- la division de N par 8 laisse un reste égal à 1 ;
- la division de N par 15 laisse un reste égal à 1.

Déterminer N en justifiant qu'il est bien le plus petit entier possible.

Thème VIII

Défis de concours

Exercice 37 ★★ ★ [*] Approfondissement : un PGCD aussi grand que possible

Source : D'après Concours Gauss 8, Université de Waterloo, 2024, question 23.

Cinq entiers naturels non nuls, tous différents, ont pour somme 264. Leur plus grand diviseur commun est noté d . Déterminer la plus grande valeur possible de d , puis donner un exemple de cinq entiers qui permet de l'atteindre.

Exercice 38 ★★ ★ [*] Approfondissement : la pyramide multiplicative

Source : D'après Kangourou des mathématiques 2024, sujet C (4e-3e), question 23.

Une pyramide comporte trois entiers naturels non nuls sur sa ligne inférieure. Chaque case située au-dessus contient le produit des deux cases placées immédiatement en dessous.

La case du sommet contient 720. On note k l'entier placé au milieu de la ligne inférieure. Combien de valeurs différentes k peut-il prendre ?

Exercice 39

★★★

[*] Approfondissement : somme et produit des chiffres

Source : D’après MATHCOUNTS, Problem of the Week, 25 juillet 2022.

Combien existe-t-il d’entiers à quatre chiffres dont la somme des chiffres est égale au produit des chiffres ?

Exercice 40

★★★

[*] Approfondissement : quotients de puissances

Source : D’après Concours Pascal (Grade 9), Université de Waterloo, 2024, question 25.

- EN Choose a, b and c from $3^1, 3^2, \dots, 3^8$, with $a \leq b \leq c$. How many triples make ab/c , ac/b and bc/a integers ?
- FR On choisit a, b et c parmi $3^1, 3^2, \dots, 3^8$, avec $a \leq b \leq c$. Combien de triplets rendent entiers les quotients ab/c , ac/b et bc/a ?

Exercice 41

★★★

[*] Approfondissement : trois chiffres à choisir

Source : D’après Concours Pascal (Grade 9), Université de Waterloo, 2025, question 25.

Les lettres A, B et C représentent des chiffres (de 0 à 9) qui peuvent être égaux. Une même lettre désigne toujours le même chiffre. On forme les trois nombres à six chiffres

$$\overline{7A6B5C}, \quad \overline{2B9C5A}, \quad \overline{7C1A6B}.$$

- EN How many choices of the digits (A, B, C) make the sum of these three numbers divisible by 36 ?
- FR De combien de façons peut-on choisir les chiffres (A, B, C) pour que la somme de ces trois nombres soit divisible par 36 ?

↵ Fin du devoir ↲